

ANÁLISE DINÂMICA TRANSIENTE DE TRELIÇAS: UMA ABORDAGEM NUMÉRICO-COMPUTACIONAL COM SUPERPOSIÇÃO MODAL E COMPARAÇÃO COM MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO DIRETA

TRANSIENT DYNAMIC ANALYSIS OF TRUSSES: A NUMERICAL-COMPUTATIONAL APPROACH WITH MODAL SUPERPOSITION AND COMPARISON WITH DIRECT INTEGRATION METHODS

EROS ADRIAN SANTOS FRANCO DE **MORAIS**¹, LUIZ ANTONIO FARANI DE **SOUZA**^{2*}

1. Acadêmico do curso de graduação do curso Engenharia Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná; 2. Professor Doutor, Disciplina Resistência dos Materiais do curso Engenharia Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

* Rua Marcílio Dias, 635, Jardim Paraíso, Apucarana, Paraná, Brasil, CEP: 86812-460. lasouza@utfpr.edu.br

Recebido em 26/08/2025. Aceito para publicação em 08/09/2025

RESUMO

Este artigo descreve um modelo numérico-computacional para a análise transiente linear de treliças planas, utilizando o método da Superposição Modal para solucionar a equação do movimento. Simulações numéricas de problemas dinâmicos de treliças sem amortecimento são efetuadas com o programa Scilab. As estruturas são discretizadas via o Método dos Elementos Finitos. As frequências naturais e os respectivos modos de vibração das estruturas são obtidos com o Método de Jacobi. As curvas deslocamento-tempo provenientes das análises transientes com o método da Superposição Modal são comparadas com as obtidas pelos métodos Aceleração Linear, Houbolt, Wilson- θ e Bathe. O método de Superposição Modal oferece uma vantagem significativa em relação aos métodos de integração direta, porque permite calcular a resposta dinâmica em um ponto específico no tempo, sem a necessidade de cálculos sequenciais. Isso resulta em uma economia de tempo de processamento em programas de análise estrutural, tornando-o uma ferramenta poderosa e eficiente para analisar vibrações e dinâmica estrutural. Ademais, este trabalho tem potencial como material didático-pedagógico para uma disciplina de análise dinâmica, uma vez que apresenta as formulações e algoritmos para a análise modal e transiente de estruturas, bem como estudos de caso sobre a análise dinâmica de treliças.

PALAVRAS-CHAVE: Análise dinâmica, superposição modal, elementos finitos, treliça plana, método de jacobi.

ABSTRACT

This paper describes a computational numerical model for the linear transient analysis of planar trusses. It uses the Modal Superposition Method to solve the equation of motion. Numerical simulations of undamped dynamic truss problems are performed using the Scilab program. We discretize the structures using the Finite Element Method. The Jacobi Method provides the structures' natural frequencies and their corresponding vibration modes. We compare the displacement-time curves from the Modal Superposition Method's transient analyses with those from the Linear Acceleration, Houbolt, Wilson- θ , and Bathe methods. The

Modal Superposition Method offers a significant advantage over direct integration methods because it allows you to calculate the dynamic response at a specific point in time without needing sequential calculations. This saves processing time in structural analysis programs, making it a powerful and efficient tool for analyzing structural vibrations and dynamics. Furthermore, this paper has potential as teaching material for a dynamic analysis course. It presents the formulations and algorithms for the modal and transient analysis of structures and provides case studies on the dynamic analysis of trusses.

KEYWORDS: Dynamic analysis, modal superposition, finite elements, planar truss, jacobi method.

1. INTRODUÇÃO

Um dos problemas que os engenheiros estruturais enfrentam diz respeito à obtenção da solução numérica da equação dinâmica de movimento em comportamentos lineares e não lineares de sistemas estruturais. Uma abordagem eficaz para resolver esse problema é o uso de algoritmos de integração numérica. Nessa abordagem, o domínio do tempo é dividido em passos de tempo finitos e pequenos. Geralmente, algumas fórmulas são assumidas para estimar as respostas em cada passo de tempo. A estabilidade do método de solução depende do erro propagado de um passo de tempo para o próximo e, se depois de um tempo ele aumentar, os resultados divergirão da solução exata¹.

Na atualidade, a engenharia estrutural vem concebendo sistemas estruturais em que a consideração dos efeitos dinâmicos durante o procedimento de análise é indispensável. Usualmente, esses efeitos dinâmicos são provocados por carregamentos externos tempo-dependentes, por exemplo, os produzidos por ventos, sismos, atuação de equipamentos, entre outros. No estudo de sistemas estruturais submetidos a carregamentos dinâmicos, os programas computacionais atuam como grandes facilitadores no processo de modelagem, análise e avaliação de resultados². O método numérico que possibilita representar e analisar diversos fenômenos físicos no

meio contínuo mais empregado é o Método dos Elementos Finitos (MEF)³. O MEF é baseado na discretização de um modelo contínuo, com o objetivo de determinar o comportamento físico de cada elemento e suas interações com os elementos vizinhos por meio da formulação de um sistema linear de equações⁴.

A exigência por melhores métodos de avaliação das deformações e limites suportados pelas estruturas sob cargas dinâmicas vem crescendo a todo instante. Com o advento de obras de alturas antigamente impensáveis, surgiu a necessidade de realizar análises estruturais mais elaboradas, incluindo a dinâmica de cargas tempo - variáveis e suas relações com as frequências naturais da estrutura. O aumento da esbelteza dos edifícios, tornando-os mais flexíveis, tende a reduzir sua capacidade de amortecimento. Esse conjunto de fatores resulta em estruturas mais suscetíveis às ações dinâmicas⁵.

A análise modal possibilita o cálculo das frequências naturais e dos modos de vibração de um sistema, permitindo o dimensionamento do projeto de maneira a evitar ressonâncias com as ações dinâmicas ou outros efeitos adversos que possam impactar a obra. Por sua vez, a análise dinâmica transiente pode ser especialmente útil em determinadas situações, porque avalia a resposta de uma estrutura submetida a carregamentos dinâmicos. De forma geral, a análise dinâmica emprega métodos numéricos aproximados para solucionar as equações diferenciais que descrevem a resposta dinâmica da estrutura. A utilização desses métodos se justifica pela elevada complexidade e pelo alto custo computacional dos métodos analíticos quando aplicados a estruturas com geometria mais complexa^{6,7}.

Para sistemas dinâmicos lineares, há dois métodos principais de solução: o método de Superposição Modal e os métodos de integração temporal. O método de Superposição Modal é uma técnica amplamente empregada na análise dinâmica de estruturas para solucionar sistemas com múltiplos graus de liberdade. Especialmente eficaz para sistemas lineares, esse método permite que a resposta dinâmica da estrutura seja decomposta em uma combinação linear das respostas de modos de vibração individuais. Entre suas principais vantagens, destacam-se a redução da complexidade do problema, ao transformar um sistema com múltiplos graus de liberdade em um conjunto de sistemas com um grau de liberdade, e a eficiência computacional, viabilizando a análise de grandes sistemas estruturais com menor custo computacional⁸.

Métodos de integração temporal implícitos e explícitos para a solução da equação do movimento são empregados em pacotes comerciais ou não comerciais para análise estrutural, por exemplo, o programa ABAQUS. Os procedimentos explícitos, como o método da Diferença Central, são condicionalmente tabulados e demandam incrementos de tempo menores para atingir resultados precisos. Procedimentos implícitos, como os métodos de Newmark⁹, Regra Trapezoidal¹⁰ e Wilson- θ ¹¹, são incondicionalmente estáveis na análise linear, mas podem se tornar instáveis

na análise não linear. Embora os métodos explícitos evitem o procedimento de iteração, o erro de truncamento durante o procedimento será acumulado e poderá levar a resultados imprecisos ou dificuldade na obtenção de convergência. Para métodos implícitos, o erro será eliminado por meio de várias etapas de iteração, e a precisão dos resultados é garantida dentro da tolerância pré-definida. Portanto, os métodos implícitos podem empregar incrementos de tempo maiores¹².

Há pesquisas recentes que utilizaram o Método da Superposição Modal na análise dinâmica de treliças. Debella et al. (2020)¹³ apresentaram uma abordagem adaptativa do Método dos Elementos Finitos Generalizados (GFEM) para a análise dinâmica transiente de barras e treliças. O GFEM adaptativo, anteriormente proposto para análise de vibração livre, foi usado com o Método de Superposição Modal para obter respostas precisas no tempo. Xing, Yao e Ji (2022)¹⁴ combinaram o Método de Superposição Modal com um método de integração temporal, como a Regra Trapezoidal, para melhorar a precisão da solução para sistemas dinâmicos lineares. Tahaye Abadi (2023)¹⁵ apresentou um método para avaliar a resposta transiente de treliças. Esse método utilizou a superposição modal e foi verificado por métodos anteriores para caracterizar a resposta de alta frequência e as frequências naturais das estruturas.

Este artigo tem por escopo apresentar um procedimento numérico-computacional com o método Superposição Modal para a análise linear dinâmica de estruturas do tipo treliça. A treliça é uma estrutura formada unicamente por elementos retilíneos que estão conectados entre si em suas extremidades, com o objetivo de suportar forças concentradas aplicadas nos nós. As estruturas treliçadas são sistemas estruturais amplamente utilizados em edifícios, pontes, plataformas *offshore*, torres de transmissão e, até mesmo, em estruturas no espaço. A ampla aplicabilidade dessas estruturas deve-se principalmente ao fato de que elas combinam alta resistência e rigidez com baixo peso próprio. Essas estruturas podem ser submetidas a uma variedade de cargas estáticas e dinâmicas e, geralmente, são projetadas para serem altamente redundantes e têm capacidade de reserva contra colapso se um de seus membros falhar¹⁶.

As simulações numéricas de dois problemas dinâmicos de treliças planas são efetuadas por meio de um código computacional desenvolvido com o programa livre Scilab, versão 2025.1.0¹⁷. A solução da equação do movimento é obtida com os métodos de Superposição Modal¹⁸, Newmark⁹, Houbolt¹⁹, Wilson- θ ¹¹ e Bathe²⁰. A formulação e o pseudocódigo desses métodos para as análises transientes são fornecidos. As estruturas são discretizadas via Método dos Elementos Finitos. As frequências naturais e os respectivos modos de vibração das estruturas são obtidos com o Método de Jacobi¹⁸. O amortecimento estrutural não é considerado nas análises transientes.

2. MATERIAL E MÉTODOS

Nesta seção, a metodologia empregada para a análise linear dinâmica de treliças bidimensionais é descrita.

Método dos Elementos Finitos para treliça 2D

A matriz de rigidez elementar de uma treliça plana, considerando que os elementos sejam prismáticos e constituídos de material homogêneo e isotrópico, é obtida em função de seu comprimento indeformado L , do módulo de elasticidade longitudinal E e da área da seção transversal A . Matematicamente, essa matriz no sistema cartesiano local de coordenadas é representada por^{21,22}:

$$\mathbf{k}_{EL} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Os parâmetros relativos à massa do elemento devem ser considerados na análise dinâmica definindo a matriz de massa elementar, a qual pode ser discreta ou consistente. A matriz de massa condensada elementar, dada pela Equação (2), é uma montagem simplificada que considera que cada ponto nodal do elemento concentra metade de sua massa. A matriz de massa consistente, por sua vez, é obtida pela formulação do MEF e é representada pela Equação (3)¹⁸.

$$\mathbf{m}_{el_{discreta}} = \frac{\rho AL}{2} \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 1] \quad (2)$$

$$\mathbf{m}_{el_{consistente}} = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

em que o símbolo $\text{diag}[\dots]$ representa matriz diagonal com os coeficientes diagonais mostrados dentro dos colchetes. As matrizes elementares, com coordenadas locais, podem ser convertidas para o sistema cartesiano global de coordenadas por meio da pré-multiplicação pela matriz de transformação \mathbf{T} e pós-multiplicação por sua transposta \mathbf{T}^T . A matriz de transformação é representada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

na qual θ é o ângulo formado entre os eixos dos sistemas cartesianos de coordenadas local e global.

Equação do Movimento

O equilíbrio de uma estrutura sob efeitos dinâmicos é avaliado pela seguinte equação diferencial de segunda ordem (EDO)²³:

$$\mathbf{K} \mathbf{u}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}_{ext}(t) \quad (5)$$

em que \mathbf{K} é a matriz de rigidez, \mathbf{C} é a matriz de amortecimento, \mathbf{M} é a matriz de massa, $\mathbf{u}(t)$ é o vetor de deslocamentos nodais, $\dot{\mathbf{u}}(t)$ é o vetor de velocidades nodais, $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ é o vetor de acelerações nodais e $\mathbf{F}_{ext}(t)$ é

o vetor de cargas dinâmicas. Salienta-se que a Equação (5) pode ser aplicada tanto para análises globais da estrutura, em que as matrizes e vetores inseridos são de caráter global, ou seja, responsáveis pelos graus de liberdade de todos os nós da estrutura, assim como para análises elementares, em que são utilizados os parâmetros elementares, que governam somente as deslocabilidades inerentes ao respectivo elemento.

Método de Newmark

O método de Newmark (1959)⁹ é um dos métodos mais populares empregados para análise dinâmica e é uma forma implícita de solucionar a Equação (5) em intervalos discretos definidos de tempo. As seguintes relações para o deslocamento e a velocidade são definidas, respectivamente^{22,23}:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta t \quad {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \quad {}^t\ddot{\mathbf{u}} \quad (6)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t (1 - \gamma) \quad {}^t\ddot{\mathbf{u}} + \Delta t \gamma \quad {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \quad (7)$$

em que Δt é o incremento de tempo e γ e β são os parâmetros relativos ao método. Alguns casos particulares podem ser considerados para a definição desses parâmetros. O método de Aceleração Média Constante é definido fazendo os valores $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/4$. Já, o método da Aceleração Linear é obtido considerando $\gamma = 1/2$ e $\beta = 1/6$ (Bathe, 2016)²⁰. Na Figura 1, o pseudocódigo para o método geral de Newmark é apresentado.

Método de Houbolt

O método de Houbolt foi desenvolvido por J. C. Houbolt em 1950 e permite realizar uma análise transiente por meio do emprego das seguintes expressões de diferenças finitas advindas da expansão em série de Taylor (Rao, 2004; Bathe, 2016)^{20,21}:

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} = \frac{1}{\Delta t^2} \left(2 \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - 5 \quad {}^t\mathbf{u} + 4 \quad {}^{t-\Delta t}\mathbf{u} - \quad {}^{t-2\Delta t}\mathbf{u} \right) \quad (8)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{6 \Delta t} \left(11 \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - 18 \quad {}^t\mathbf{u} + 9 \quad {}^{t-\Delta t}\mathbf{u} - \quad 2 \quad {}^{t-2\Delta t}\mathbf{u} \right) \quad (9)$$

Substituindo as Equações (8) e (9) na Equação (5), é possível estabelecer a seguinte equação de equilíbrio dinâmico no instante de tempo $(t + \Delta t)$ ²¹:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{11}{6 \Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} \\ & = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{ext} \\ & + \left(\frac{5}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\Delta t} \mathbf{C} \right) {}^t \mathbf{u} \\ & - \left(\frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right. \\ & \left. + \frac{3}{2 \Delta t} \mathbf{C} \right) {}^{t-\Delta t} \mathbf{u} \\ & + \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right. \\ & \left. + \frac{1}{3 \Delta t} \mathbf{C} \right) {}^{t-2\Delta t} \mathbf{u} \end{aligned} \tag{10}$$

Entrada: $\Delta t, \mathbf{K}, \mathbf{M}, \mathbf{C}, {}^0 \mathbf{u}, {}^0 \dot{\mathbf{u}}, {}^0 \mathbf{F}_{ext}$
Saída: $\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}$
 Casos especiais:
 - Método de Aceleração média constante: $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$
 - Método de Aceleração linear: $\beta = 1/6$ e $\gamma = 1/2$
 1. Determine o vetor aceleração para $t = 0$:
 ${}^0 \ddot{\mathbf{u}} \leftarrow \mathbf{M}^{-1} ({}^0 \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{C} {}^0 \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{K} {}^0 \mathbf{u})$
 2. Selecione Δt e com os valores de β e γ calcule as matrizes \mathbf{a}_i :
 $\mathbf{a}_1 \leftarrow \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C}; \mathbf{a}_2 \leftarrow \frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{M} + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \mathbf{C};$
 $\mathbf{a}_3 \leftarrow \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{M} + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{C}$
 3. Determine a matriz de rigidez efetiva:
 $\mathbf{K}_{ef} \leftarrow \mathbf{K} + \mathbf{a}_1$
 4. Para cada passo de tempo faça:
 4.1 Determine o vetor de forças efetivas no tempo ($t + \Delta t$):
 ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{ef} \leftarrow {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{a}_1 {}^t \mathbf{u} + \mathbf{a}_2 {}^t \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_3 {}^t \ddot{\mathbf{u}}$
 4.2 Resolva o sistema de equações lineares no tempo ($t + \Delta t$):
 ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u} \leftarrow [\mathbf{K}_{ef}]^{-1} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{ef}$
 4.3 Calcule os deslocamentos, velocidades e acelerações no tempo ($t + \Delta t$):
 ${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}} \leftarrow \frac{\gamma}{\beta \Delta t} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{u} - {}^t \mathbf{u}) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) {}^t \dot{\mathbf{u}}$
 $\quad + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) {}^t \ddot{\mathbf{u}}$
 ${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} \leftarrow \frac{1}{\beta \Delta t^2} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{u} - {}^t \mathbf{u}) - \frac{1}{\beta \Delta t} {}^t \dot{\mathbf{u}} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) {}^t \ddot{\mathbf{u}}$

Figura 1. Pseudocódigo do método geral de Newmark. **Fonte:** Adaptada de Bathe (2016)²⁰.

Conforme a Equação (10), para que seja determinado o deslocamento para o próximo passo de tempo ($t + \Delta t$), é necessário o conhecimento dos vetores de deslocamento nos instantes t , ($t - \Delta t$) e ($t - 2 \Delta t$). Portanto, é viável aplicar outro método para inicializar a análise, obtendo os deslocamentos nos dois primeiros passos de tempo. O método da Diferença Central pode ser utilizado para fornecer as condições iniciais ${}^{-\Delta t} \mathbf{u}$ e ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}$ por meio das seguintes equações, respectivamente^{20,21}:

$${}^{-\Delta t} \mathbf{u} = {}^0 \mathbf{u} - \Delta t {}^0 \dot{\mathbf{u}} + \frac{\Delta t^2}{2} {}^0 \ddot{\mathbf{u}} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} & = \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2 \Delta t} \mathbf{C} \right)^{-1} \left[{}^t \mathbf{F}_{ext} \right. \\ & \quad - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) {}^t \mathbf{u} \\ & \quad - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2 \Delta t} \mathbf{C} \right) {}^{t-\Delta t} \mathbf{u} \left. \right] \end{aligned} \tag{12}$$

O pseudocódigo para o método de Houbolt é apresentado na Figura 2.

Entrada: $\Delta t, \mathbf{K}, \mathbf{M}, \mathbf{C}, {}^0 \mathbf{u}, {}^0 \dot{\mathbf{u}}, {}^0 \mathbf{F}_{ext}$
Saída: $\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}$
 1. Selecione Δt e com os valores de β e γ calcule os escalares a_i :
 $a_0 \leftarrow \frac{2}{\Delta t^2}; a_1 \leftarrow \frac{11}{6 \Delta t}; a_2 \leftarrow \frac{5}{\Delta t^2}; a_3 \leftarrow \frac{3}{\Delta t};$
 $a_4 \leftarrow -2a_0; a_5 \leftarrow \frac{-a_3}{2}; a_6 \leftarrow \frac{a_0}{2}; a_7 \leftarrow \frac{a_3}{9}$
 2. Determine a matriz de rigidez efetiva:
 $\mathbf{K}_{ef} \leftarrow \mathbf{K} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}$
 3. Para cada passo de tempo faça:
 3.1 Determine o vetor de forças efetivas no tempo ($t + \Delta t$):
 ${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{ef} \leftarrow {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{M} (a_2 {}^t \mathbf{u} + a_4 {}^{t-\Delta t} \mathbf{u} + a_6 {}^{t-2\Delta t} \mathbf{u})$
 $\quad + \mathbf{C} (a_3 {}^t \mathbf{u} + a_5 {}^{t-\Delta t} \mathbf{u} + a_7 {}^{t-2\Delta t} \mathbf{u})$
 3.2 Resolva o sistema de equações lineares no tempo ($t + \Delta t$):
 ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u} \leftarrow [\mathbf{K}_{ef}]^{-1} {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{ef}$
 3.3 Calcule os deslocamentos, velocidades e acelerações no tempo ($t + \Delta t$):
 ${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}} \leftarrow a_0 {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} - a_2 {}^t \mathbf{u} - a_4 {}^{t-\Delta t} \mathbf{u} - a_6 {}^{t-2\Delta t} \mathbf{u}$
 ${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} \leftarrow a_1 {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} - a_3 {}^t \mathbf{u} - a_5 {}^{t-\Delta t} \mathbf{u} - a_7 {}^{t-2\Delta t} \mathbf{u}$

Figura 2. Pseudocódigo do método de Houbolt. **Fonte:** Adaptada de Bathe (2016)²⁰.

Método de Wilson- θ

O método de Wilson- θ é fundamentalmente uma extensão do método de Aceleração Linear, em que se assume uma variação linear da aceleração do tempo t para ($t + \Delta t$). Os vetores velocidade $\dot{\mathbf{u}}$ e deslocamento \mathbf{u} são determinados no tempo ($t + \theta \Delta t$) pelas seguintes expressões, respectivamente^{20,24}:

$${}^{t+\theta \Delta t} \dot{\mathbf{u}} = {}^t \dot{\mathbf{u}} + \frac{\theta \Delta t}{2} ({}^{t+\theta \Delta t} \ddot{\mathbf{u}} + {}^t \ddot{\mathbf{u}}) \tag{13}$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\theta \Delta t} \mathbf{u} & = {}^t \mathbf{u} + \theta \Delta t {}^t \dot{\mathbf{u}} \\ & \quad + \frac{(\theta \Delta t)^2}{6} ({}^{t+\theta \Delta t} \ddot{\mathbf{u}} + 2 {}^t \ddot{\mathbf{u}}) \end{aligned} \tag{14}$$

Para que esse método tenha estabilidade incondicional, deve-se assumir o parâmetro $\theta \geq 1,37$. Pode-se resolver para ${}^{t+\theta \Delta t} \ddot{\mathbf{u}}$ e ${}^{t+\theta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}$ em termos de ${}^{t+\theta \Delta t} \mathbf{u}$ da seguinte maneira:

$${}^{t+\theta \Delta t} \ddot{\mathbf{u}} = \frac{6}{(\theta \Delta t)^2} ({}^{t+\theta \Delta t} \mathbf{u} - {}^t \mathbf{u}) - \frac{6}{\theta \Delta t} {}^t \dot{\mathbf{u}} - 2 {}^t \ddot{\mathbf{u}} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\theta \Delta t} \dot{\mathbf{u}} & = \frac{3}{\theta \Delta t} ({}^{t+\theta \Delta t} \mathbf{u} - {}^t \mathbf{u}) - 2 {}^t \dot{\mathbf{u}} \\ & \quad - \frac{\theta \Delta t}{2} {}^t \ddot{\mathbf{u}} \end{aligned} \tag{16}$$

Para obter a solução dos deslocamentos, velocidades e acelerações no tempo $(t + \Delta t)$, as equações de equilíbrio em Equação (5) são consideradas no tempo $(t + \theta \Delta t)$. Na Figura 3 aparece o pseudocódigo do método de Wilson- θ . Verifica-se que para $\theta = 1$ o método de Wilson- θ recai no método de Aceleração Linear.

Entrada: $\Delta t, \mathbf{K}, \mathbf{M}, \mathbf{C}, {}^0\mathbf{u}, {}^0\dot{\mathbf{u}}, {}^0\mathbf{F}_{ext}$
Saída: $\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}$

1. Calcule as constantes a_i com $\theta = 1,4$:
 $a_0 \leftarrow \frac{6}{(\theta \Delta t)^2}; a_1 \leftarrow \frac{3}{\theta \Delta t}; a_2 \leftarrow 2a_1; a_3 \leftarrow \frac{\theta \Delta t}{2};$
 $a_4 \leftarrow \frac{a_0}{\theta}; a_5 \leftarrow -\frac{a_2}{\theta}; a_6 \leftarrow 1 - \frac{3}{\theta}; a_7 \leftarrow \frac{\Delta t}{2};$
 $a_8 \leftarrow \frac{\Delta t^2}{6}$
2. Calcule a matriz de rigidez efetiva:
 $\mathbf{K}_{ef} \leftarrow \mathbf{K} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}$
3. Para cada passo de tempo faça:
 - 3.1 Determine o vetor de forças efetivas no tempo $(t + \theta \Delta t)$:
 ${}^{t+\theta \Delta t}\mathbf{F}_{ef} \leftarrow {}^t\mathbf{F}_{ext} + \theta({}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ext} - {}^t\mathbf{F}_{ext})$
 $+ \mathbf{M}(a_0 {}^t\mathbf{u} + a_2 {}^t\dot{\mathbf{u}} + 2 {}^t\ddot{\mathbf{u}})$
 $+ \mathbf{C}(a_1 {}^t\mathbf{u} + 2 {}^t\dot{\mathbf{u}} + a_3 {}^t\ddot{\mathbf{u}})$
 - 3.2 Resolva o sistema de equações lineares no tempo $(t + \theta \Delta t)$:
 ${}^{t+\theta \Delta t}\mathbf{u} \leftarrow [\mathbf{K}_{ef}]^{-1} {}^{t+\theta \Delta t}\mathbf{F}_{ef}$
 - 3.3 Calcule os deslocamentos, velocidades e acelerações no tempo $(t + \Delta t)$:
 ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \leftarrow a_4({}^{t+\theta \Delta t}\mathbf{u} - {}^t\mathbf{u}) + a_5 {}^t\dot{\mathbf{u}} + a_6 {}^t\ddot{\mathbf{u}}$
 ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} \leftarrow {}^t\dot{\mathbf{u}} + a_7({}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} + {}^t\ddot{\mathbf{u}})$
 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} \leftarrow {}^t\mathbf{u} + \Delta t {}^t\dot{\mathbf{u}} + a_8({}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} + 2 {}^t\ddot{\mathbf{u}})$

Figura 3. Pseudocódigo do método de Wilson- θ . Fonte: Adaptada de Bathe (2016)²⁰.

Método de Bathe

O método de Bathe considera duas subetapas para cada tempo de integração Δt . Na primeira subetapa, emprega-se a regra Trapezoidal de Newmark e na segunda subetapa, utiliza-se a regra de Euler de três pontos regressivo. Na primeira subetapa, os vetores velocidade $\dot{\mathbf{u}}$ e deslocamento \mathbf{u} no tempo $(t + \Delta t/2)$ são determinados por, respectivamente (Bathe, 2016; Souza, 2024a)^{20,24}:

$${}^{t+\Delta t/2}\dot{\mathbf{u}} = {}^t\dot{\mathbf{u}} + \frac{\Delta t}{4} ({}^t\ddot{\mathbf{u}} + {}^{t+\Delta t/2}\ddot{\mathbf{u}}) \quad (17)$$

$${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \frac{\Delta t}{4} ({}^t\dot{\mathbf{u}} + {}^{t+\Delta t/2}\dot{\mathbf{u}}) \quad (18)$$

No que concerne à segunda subetapa, os vetores velocidade $\dot{\mathbf{u}}$ e aceleração $\ddot{\mathbf{u}}$ são avaliados no tempo $(t + \Delta t)$ pelas equações, respectivamente:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{\Delta t} {}^t\mathbf{u} - \frac{4}{\Delta t} {}^{t+\Delta t/2}\mathbf{u} + \frac{3}{\Delta t} {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} \quad (19)$$

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} = \frac{1}{\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{u}} - \frac{4}{\Delta t} {}^{t+\Delta t/2}\dot{\mathbf{u}} + \frac{3}{\Delta t} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} \quad (20)$$

As equações de equilíbrio no tempo $(t + \Delta t/2)$ são dadas por:

$$\left(\frac{16}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{4}{\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) {}^{t+\Delta t/2}\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t/2}\mathbf{F}_{ef} \quad (21)$$

com

$${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{F}_{ef} = {}^{t+\Delta t/2}\mathbf{F}_{ext} + \mathbf{M} \left(\frac{16}{\Delta t^2} {}^t\mathbf{u} + \frac{8}{\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{u}} + {}^t\ddot{\mathbf{u}} \right) + \mathbf{C} \left(\frac{4}{\Delta t} {}^t\mathbf{u} + {}^t\dot{\mathbf{u}} \right) \quad (22)$$

As equações de equilíbrio são escritas no tempo $(t + \Delta t)$ por:

$$\left(\frac{9}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ef} \quad (23)$$

sendo

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ef} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ext} + \mathbf{M} \left(\frac{12}{\Delta t^2} {}^{t+\Delta t/2}\mathbf{u} - \frac{3}{\Delta t^2} {}^t\mathbf{u} + \frac{4}{\Delta t} {}^{t+\Delta t/2}\dot{\mathbf{u}} - \frac{1}{\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{u}} \right) + \mathbf{C} \left(\frac{4}{\Delta t} {}^{t+\Delta t/2}\mathbf{u} - \frac{1}{\Delta t} {}^t\mathbf{u} \right) \quad (24)$$

Na Figura 4, apresenta-se o pseudocódigo do procedimento completo da solução do método de Bathe.

Análise modal

Para um sistema estrutural com n graus de liberdade, sem o efeito do amortecimento ($\mathbf{C} = \mathbf{0}$), a equação de equilíbrio fica (Souza, 2024b)²⁵:

$$\mathbf{K} \mathbf{u}(t) + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}_{ext}(t) \quad (25)$$

Uma forma de solução para esse problema é dada por (Soriano, 2014)¹⁸:

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\varphi}_i \cos(\omega_i t - \phi_i) \quad (26)$$

em que $\boldsymbol{\varphi}_i$ é o i -ésimo modo de vibração, ω_i é a frequência natural correspondente, t é a variável de tempo e ϕ_i é o correspondente ângulo de fase. Com essas considerações, é possível chegar a um problema de autovetores generalizados, sendo ele^{18,20,21}:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Omega} \quad (27)$$

na qual a matriz $\boldsymbol{\Phi}$ é montada de forma que cada coluna seja um autovetor $\boldsymbol{\varphi}_i$.

A matriz $\boldsymbol{\Omega}$ é diagonal, com cada termo sendo o quadrado da frequência natural ω_i . As matrizes $\boldsymbol{\Phi}$ e $\boldsymbol{\Omega}$ são escritas da seguinte forma, respectivamente:

$$\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\varphi}_1 \quad \boldsymbol{\varphi}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\varphi}_n] \quad (28)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \text{diag}[\omega_1^2 \quad \omega_2^2 \quad \dots \quad \omega_n^2] \quad (29)$$

Frequentemente, a disposição dos autovetores e autovalores nas matrizes $\boldsymbol{\Phi}$ e $\boldsymbol{\Omega}$, expressada pelo subíndice, é denotada em ordem crescente de grandeza das frequências naturais, isto é, $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$. O termo ω_1 é chamado de frequência fundamental de vibração, da mesma forma, $\boldsymbol{\varphi}_1$ é o modo de vibração fundamental da estrutura²¹.

Entrada: $\Delta t, \mathbf{K}, \mathbf{M}, \mathbf{C}, {}^0\mathbf{u}, {}^0\dot{\mathbf{u}}, {}^0\ddot{\mathbf{u}}, {}^0\mathbf{F}_{ext}$
Saída: $\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}$

- Calcule as constantes a_i :
 $a_0 \leftarrow \frac{16}{\Delta t^2}; a_1 \leftarrow \frac{4}{\Delta t}; a_2 \leftarrow \frac{9}{\Delta t^2}; a_3 \leftarrow \frac{3}{\Delta t};$
 $a_4 \leftarrow 2a_1; a_5 \leftarrow \frac{12}{\Delta t^2}; a_6 \leftarrow -\frac{3}{\Delta t^2}; a_7 \leftarrow -\frac{1}{\Delta t}$
- Calcule a matrizes de rigidez \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 :
 $\mathbf{K}_1 \leftarrow a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{C} + \mathbf{K}; \mathbf{K}_2 \leftarrow a_2\mathbf{M} + a_3\mathbf{C} + \mathbf{K}$
- Para cada passo de tempo faça:
Primeira subetapa:
 3.1 Determine o vetor de forças efetivas no tempo $(t + \Delta t/2)$:
 ${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{F}_{ef} \leftarrow {}^{t+\Delta t/2}\mathbf{F}_{ext} + \mathbf{M}(a_0 {}^t\mathbf{u} + a_4 {}^t\dot{\mathbf{u}} + {}^t\ddot{\mathbf{u}}) + \mathbf{C}(a_1 {}^t\mathbf{u} + {}^t\dot{\mathbf{u}})$
 3.2 Resolva o sistema de equações lineares no tempo $(t + \Delta t/2)$:
 ${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{u} \leftarrow [\mathbf{K}_1]^{-1} {}^{t+\Delta t/2}\mathbf{F}_{ef}$
 3.3 Calcule as velocidades e acelerações no tempo $(t + \Delta t/2)$:
 ${}^{t+\Delta t/2}\dot{\mathbf{u}} \leftarrow a_1({}^{t+\Delta t/2}\mathbf{u} - {}^t\mathbf{u}) - {}^t\dot{\mathbf{u}}$
 ${}^{t+\Delta t/2}\ddot{\mathbf{u}} \leftarrow a_1({}^{t+\Delta t/2}\dot{\mathbf{u}} - {}^t\dot{\mathbf{u}}) - {}^t\ddot{\mathbf{u}}$
Segunda subetapa:
 3.4 Determine o vetor de forças efetivas no tempo $(t + \Delta t)$:
 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ef} \leftarrow {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ext} + \mathbf{M}(a_5 {}^{t+\Delta t/2}\mathbf{u} + a_6 {}^t\mathbf{u} + a_1 {}^{t+\Delta t/2}\ddot{\mathbf{u}} + a_7 {}^t\dot{\mathbf{u}}) + \mathbf{C}(a_1 {}^{t+\Delta t/2}\mathbf{u} + a_7 {}^t\mathbf{u})$
 3.5 Resolva o sistema de equações lineares no tempo $(t + \Delta t)$:
 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} \leftarrow [\mathbf{K}_2]^{-1} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ef}$
 3.6 Calcule as velocidades e acelerações no tempo $(t + \Delta t)$:
 ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} \leftarrow -a_7 {}^t\mathbf{u} - a_1 {}^{t+\Delta t/2}\mathbf{u} + a_3 {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$
 ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \leftarrow -a_7 {}^t\dot{\mathbf{u}} - a_1 {}^{t+\Delta t/2}\dot{\mathbf{u}} + a_3 {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}}$

Figura 4. Pseudocódigo do método de Bathe. Fonte: Adaptada de Bathe (2016)²⁰.

Há diversas maneiras de normalizar os vetores de modo de vibração, como a imposição de comprimento euclidiano unitário. A normalização em relação à matriz de massa é a mais vantajosa para a análise dinâmica¹⁸. Esse tipo de normalização consiste em multiplicar cada autovetor por uma constante, de forma a satisfazer a seguinte relação:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \tag{30}$$

em que \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem n . Pré-multiplicando a Equação (27) por Φ^T , obtêm-se a relação:

$$\begin{aligned} \Phi^T \mathbf{K} \Phi &= \Phi^T \mathbf{M} \Phi \Omega = \mathbf{I} \Omega = \Omega \\ \Phi^T \mathbf{K} \Phi &= \Omega \end{aligned} \tag{31}$$

Método de Jacobi

O método de Jacobi é um procedimento para resolver problemas de autovalor na forma reduzida com matriz real e simétrica, mas pode ser estendido à forma generalizada de problema de autovalor. A generalização desse método é feita estabelecendo a sequência de transformações similares ortogonais¹⁸:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(j+1)} &= \mathbf{T}^{(j)T} \mathbf{K}^{(j)} \mathbf{T}^{(j)} \\ \mathbf{M}^{(j+1)} &= \mathbf{T}^{(j)T} \mathbf{M}^{(j)} \mathbf{T}^{(j)} \end{aligned} \tag{32}$$

em que $j = 1, 2, 3, \dots$. Considerando a seguinte notação:

$$\mathbf{T}^{*(j)} = \mathbf{T}^{(1)} \mathbf{T}^{(2)} \dots \mathbf{T}^{(j)} \tag{33}$$

obtêm-se as matrizes transformadas:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(j+1)} &= \mathbf{T}^{*(j)T} \mathbf{K}^{(1)} \mathbf{T}^{*(j)} \\ \mathbf{M}^{(j+1)} &= \mathbf{T}^{*(j)T} \mathbf{M}^{(1)} \mathbf{T}^{*(j)} \end{aligned} \tag{34}$$

As matrizes $\mathbf{T}^{(j)}$ são consideradas de tal maneira que no limite $j \rightarrow \infty$, $\mathbf{K}^{(j+1)}$ e $\mathbf{M}^{(j+1)}$ convergem para matrizes diagonais $\mathbf{K}^{(d)}$ e $\mathbf{M}^{(d)}$, respectivamente. A matriz modal Φ normalizada em relação à matriz de massa e a matriz espectral de frequências naturais Ω são dadas, respectivamente, por¹⁸:

$$\Phi = \mathbf{T}^* \mathbf{M}^{(j+1)-1/2} \tag{35}$$

$$\Omega = \mathbf{K}^{(j+1)} \mathbf{M}^{(j+1)-1} \tag{36}$$

Com base nessas transformações, o procedimento para determinação das matrizes Ω e Φ pelo método de Jacobi é feito conforme a sub-rotina elaborada com o programa Scilab dada na Figura 5.

Método da Superposição Modal

O método da Superposição Modal pode ser utilizado para a obtenção da resposta dinâmica em estruturas que possuem comportamento linear e amortecimento proporcional. Esse método consiste em expressar a deformada da estrutura em relação aos modos normais de vibração em um novo espaço vetorial, chamado de espaço modal, desacoplando a equação do movimento dada em Equação (5) em equações independentes, cuja resposta é dada pela superposição das soluções dessas equações modais independentes¹⁸.

É possível correlacionar os deslocamentos nodais $\mathbf{u}(t)$ com os modos de vibração da estrutura, presentes na matriz modal Φ , estabelecendo um vetor $\mathbf{X}(t)$ em que seus termos são denominados como deslocamentos generalizados e representados por x_i . Essa relação se dá da seguinte forma^{18,20}:

$$\mathbf{u}(t) = \Phi \mathbf{X}(t) \tag{37}$$

A matriz Φ é uma matriz cujas colunas são as formas nodais φ_i para cada i -ésimo grau de liberdade da estrutura, com $i = 1, 2, \dots, n$. Os deslocamentos generalizados são, portanto, valores que ao multiplicar pelo seu respectivo modo de vibração são determinados os deslocamentos geométricos em um instante de tempo definido. Substituindo a Equação (37) em Equação (25) e pré-multiplicando por Φ^T , obtêm-se:

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{X}(t) + \Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{X}}(t) = \Phi^T \mathbf{F}_{ext}(t) \tag{38}$$

Considerando que o autovetor Φ é ortonormalizado em relação à matriz de massa \mathbf{M} (isto é, $\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}$) é feita a simplificação que leva à equação²⁶:

$$\Omega \mathbf{X}(t) + \ddot{\mathbf{X}}(t) = \Phi^T \mathbf{F}_{ext}(t) \tag{39}$$

sendo $\Omega = \Phi^T \mathbf{K} \Phi$. A matriz de rigidez generalizada Ω

é uma matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são as frequências naturais elevadas ao quadrado, conforme a Equação (29).

```
function [erro, cont, autovalor, autovetor]=jacobi(M, K,
NTGL)
//Cálculo de autovalores e autovetores (Método de Jacobi)
T=eye(NTGL,NTGL);
tol=10^-12;
erro=1;
erro2=0;
cont=0;
while erro>tol
    cont=cont+1;
for j=2:NTGL
for i=1:j-1
if K(i,j)<>0 || M(i,j)<>0
a=K(i,i)*M(i,j)-K(i,j)*M(i,i);
b=K(j,j)*M(i,j)-K(i,j)*M(j,j);
c=(K(i,i)*M(j,j)-K(j,j)*M(i,i))/2;
if sign(c)~=0
d=c+sign(c)*sqrt(c^2+a*b);
else
d=c+sqrt(c^2+a*b);
end
gama=-a/d;
alfa=b/d;
for l=1:NTGL
aux1=K(l,i);
K(l,i)=aux1+K(l,j)*gama;
K(l,j)=K(l,j)+aux1*alfa;
aux2=M(l,i);
M(l,i)=aux2+M(l,j)*gama;
M(l,j)=M(l,j)+aux2*alfa;
aux3=T(l,i);
T(l,i)=aux3+T(l,j)*gama;
T(l,j)=T(l,j)+aux3*alfa;
end
K(i,i)=K(i,i)+K(j,i)*gama;
K(j,j)=K(j,j)+K(i,j)*alfa;
K(i,j)=0;
M(i,i)=M(i,i)+M(j,i)*gama;
M(j,j)=M(j,j)+M(i,j)*alfa;
M(i,j)=0;
for l=1:NTGL
K(i,l)=K(l,i);
K(j,l)=K(l,j);
M(i,l)=M(l,i);
M(j,l)=M(l,j);
end
end
erro1=diag(K);
erro=(norm(erro1)-norm(erro2))/norm(erro1);
erro2=erro1;
end
autovalor=K*M^-1;
autovetor=T*M^(-1/2);
endfunction
```

Figura 5. Sub-rotina do método de Jacobi no programa Scilab. Fonte: os Autores (2025).

Os deslocamentos nodais podem ser obtidos pela superposição das respostas de cada modo de vibração por²⁰:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\varphi}_i x_i(t) \quad (40)$$

A superposição modal das contribuições dos vários modos de vibração fornece a resposta da estrutura. Verifica-se que, sobrepondo apenas as contribuições dos primeiros j modos de vibração ($j \ll n$), resultados satisfatórios são obtidos, reduzindo o esforço computacional em comparação com a integração numérica¹⁸.

3. RESULTADOS

Nesta seção, apresentam-se as análises transientes lineares de dois problemas de treliças planas, cujas estruturas foram discretizadas por meio do MEF. O efeito do amortecimento é desconsiderado, adotando-se, portanto, a matriz $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ ao longo dos incrementos de tempo. Adicionalmente, admite-se que as deformações sejam infinitesimais e que o comportamento constitutivo do material siga a hipótese de linearidade elástica.

Treliça com três barras

Seja a treliça plana da Figura 6 composta por três barras de um material genérico com módulo de elasticidade $E = 50$ GPa, área da seção transversal $A = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ e massa específica $\rho = 9500 \text{ kg/m}^3$. A partir do instante inicial $t_0 = 0$, a estrutura é submetida a duas forças aplicadas no nó “3”, quais sejam: a primeira na direção horizontal e com magnitude tempo - variável descrita por $F_1(t) = 100 t$ em kN; e a segunda, na direção vertical e constante de magnitude $F_2 = 200$ kN.

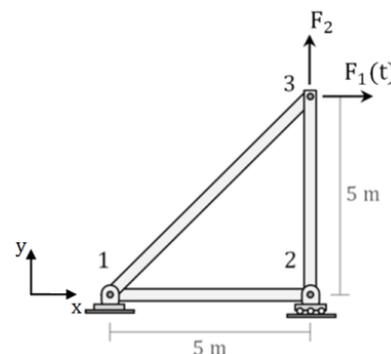


Figura 6. Modelo estrutural da treliça com três barras. Fonte: os Autores (2025).

A matriz de massa condensada, descrita pela Equação (2), é utilizada nas análises. O deslocamento na direção horizontal do nó “3” é obtido ao longo de 0,2 s pelo método da Superposição Modal. As curvas tempo *versus* deslocamento são apresentadas na Figura 7. A resposta transiente obtida pelo método da Superposição Modal é comparada com as soluções preditas pelos métodos de Aceleração Linear, Houbolt, Wilson- θ e Bathe, havendo boa concordância entre os mesmos. Para os métodos de integração direta, considera-se o incremento de tempo $\Delta t = 1,0 \times 10^{-4}$ s.

Para que seja possível a análise por Superposição Modal, os modos e as frequências de vibração são determinados pelo método de Jacobi. A estrutura em tela possui três graus de liberdade livres, correspondentes ao

deslocamento horizontal do nó "2" e aos deslocamentos horizontal e vertical do nó "3". O vetor de forças externas é dado pela seguinte equação:

$$F_{ext}(t) = F_1(t) + F_2 = f_1 t + f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 200 \end{bmatrix}, \text{ relativos a } \begin{cases} \text{direção x nó "2"} \\ \text{direção x nó "3"} \\ \text{direção y nó "3"} \end{cases} \quad (41)$$

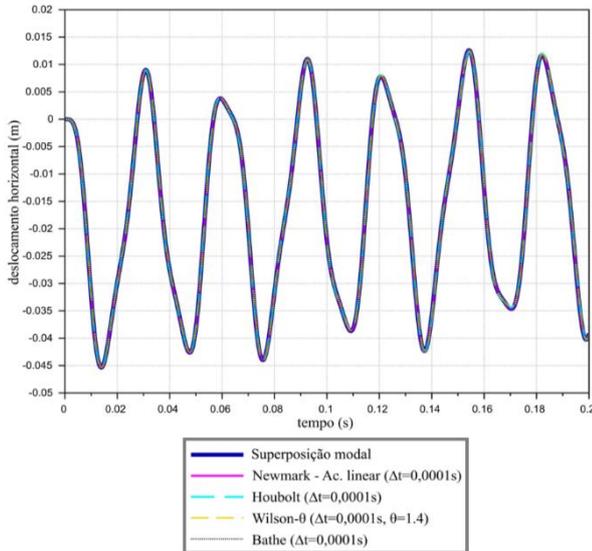


Figura 7. Curva deslocamento horizontal do nó "3" versus tempo da treliça com três barras. Fonte: os Autores (2025).

Substituindo a Equação (41) na Equação (39), tem-se:

$$\Omega X(t) + \ddot{X}(t) = \Phi^T F_{ext}(t) = \Phi^T (f_1 t + f_2) \quad (42)$$

Pela aplicação do método de Jacobi, são determinadas as matrizes Ω e Φ , que desconsiderando a reorganização em ordem crescente de frequência de vibração, são dadas por, respectivamente:

$$\Omega = \text{diag} \begin{bmatrix} 210526,32 & 42063,336 & 255665,84 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0,1450953 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1258585 & 0,0400025 \\ 0 & -0,0400025 & 0,1258585 \end{bmatrix} \quad (44)$$

O procedimento de solução da equação diferencial ordinária dada em Equação (42) é apresentado na Figura 8. Aplicando na solução geral as considerações iniciais $X(0) = 0$ e $\dot{X}(0) = 0$, correspondentes ao estado indeformado da estrutura (está em repouso no instante inicial), a solução particular é:

$$X(t) = \Omega^{-1} \Phi^T (\cos(\sqrt{\Omega} t) f_2 - \Omega^{-1/2} \text{sen}(\sqrt{\Omega} t) f_1 + f_1 t + f_2) \quad (45)$$

Aplicando a Equação (45) na Equação (37), o vetor de deslocamentos em função do tempo $u(t)$ é obtido.

Solução da parte homogênea da EDO: $\ddot{X} + \Omega X = 0$
 Supondo $X_c = e^{m t}$, e então substituindo:
 $m^2 e^{m t} + \Omega e^{m t} = 0 \rightarrow m = \sqrt{-\Omega} \therefore X_c = e^{\sqrt{-\Omega} t}$
 Pela fórmula de Euler, a solução pode ser transformada em:
 $X_c = \cos(\sqrt{\Omega} t) c_1 + \text{sen}(\sqrt{\Omega} t) c_2$
 Solução particular:
 Supondo $X_p = A t + B$ e substituindo:
 $0 + \Omega (A t + B) = \Phi^T (f_1 t + f_2) \rightarrow A = \Omega^{-1} \Phi^T f_1; B = \Omega^{-1} \Phi^T f_2$
 $\therefore X_p = \Omega^{-1} \Phi^T (f_1 t + f_2)$
 A solução geral é dada pela superposição das duas soluções:
 $X = \cos(\sqrt{\Omega} t) c_1 + \text{sen}(\sqrt{\Omega} t) c_2 + \Omega^{-1} \Phi^T (f_1 t + f_2)$

Figura 8. Solução da EDO da treliça com três barras. Fonte: os Autores (2025).

Treliça biapoiada com balanço

Considere o modelo de treliça biapoiada com balanço com múltiplas barras proposto por Santos (2022)²⁷, a qual é submetida a uma carga dinâmica descrita por uma função exponencial, conforme o modelo estrutural ilustrado na Figura 9a. As constantes relativas à força exponencial são definidas por $P_0 = 5000$ N e $\alpha = 2$ (Figura 9b).

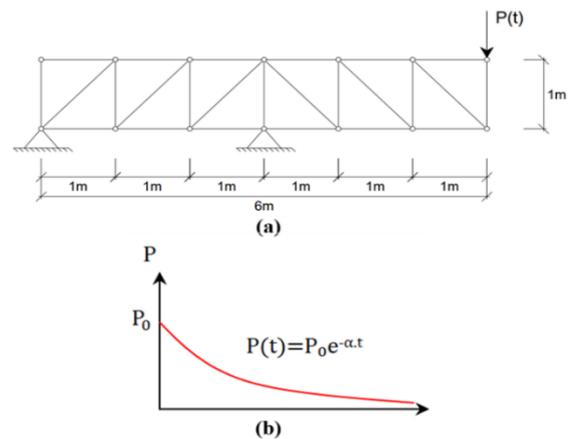


Figura 9. Treliça com três barras: a) modelo estrutural; e b) carga dinâmica. Fonte: os Autores (2025).

As barras da treliça possuem área da seção transversal $A = 5,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ e são constituídas pelo aço MR250. Esse material possui módulo de elasticidade longitudinal $E = 210$ GPa e massa específica $\rho = 7850$ kg/m³. Nesse exemplo, é utilizada a matriz elementar de massa consistente (ver a Equação (3)). O vetor de forças externas é definido da seguinte forma:

$$F_{ext}(t) = P_0 e^{-\alpha t} \quad (46)$$

em que P_0 é um vetor com o valor do escalar P_0 no termo correspondente ao grau de liberdade e sentido em que a força é aplicada e com os demais termos nulos. O método de Jacobi é utilizado para determinar as frequências naturais e os modos de vibração, contidos nas matrizes Ω e Φ , respectivamente. Aplicando a Equação (46) na Equação (39), tem-se a seguinte equação diferencial:

$$\Omega X(t) + \ddot{X}(t) = \Phi^T P_0 e^{-\alpha t} \tag{47}$$

O procedimento para a solução da Equação (47) está descrito na Figura 10. Pelo problema de valor inicial, supondo que a treliça se encontra em repouso no instante de tempo inicial, são substituídos $X(0) = \mathbf{0}$ e $\dot{X}(0) = \mathbf{0}$ na solução para determinar as constantes c_1 e c_2 , resultando em:

$$X(t) = (\alpha \Omega^{-1/2} \text{sen}(\sqrt{\Omega} t) - \text{cos}(\sqrt{\Omega} t) + e^{-\alpha t} \mathbf{I}) (\alpha^2 \mathbf{I} + \Omega)^{-1} \Phi^T P_0 \tag{48}$$

Substituindo a Equação (48) na Equação (37), o vetor de deslocamentos nodais $u(t)$ é determinado em função do tempo conforme a expressão:

$$u(t) = \Phi (\alpha \Omega^{-1/2} \text{sen}(\sqrt{\Omega} t) - \text{cos}(\sqrt{\Omega} t) + e^{-\alpha t} \mathbf{I}) (\alpha^2 \mathbf{I} + \Omega)^{-1} \Phi^T P_0 \tag{49}$$

Solução da parte homogênea da EDO: $\ddot{X} + \Omega X = \mathbf{0}$
 Supondo $X_c = e^{m t}$, e então substituindo:
 $m^2 e^{m t} + \Omega e^{m t} = \mathbf{0} \rightarrow m = \pm \sqrt{-\Omega} \therefore X_c = e^{\pm \sqrt{-\Omega} t}$
 Pela fórmula de Euler, a solução pode ser transformada em:
 $X_c = \text{cos}(\sqrt{\Omega} t) c_1 + \text{sen}(\sqrt{\Omega} t) c_2$
 Solução particular da equação:
 Supondo $X_p = A e^{-\alpha t}$ e substituindo:
 $\alpha^2 A e^{-\alpha t} + \Omega A e^{-\alpha t} = \Phi^T P_0 e^{-\alpha t}$
 Pré-multiplicando pela matriz identidade I e simplificando:
 $I \alpha^2 A + \Omega A = \Phi^T P_0 \rightarrow A = (\alpha^2 I + \Omega)^{-1} \Phi^T P_0$
 $\therefore X_p = (\alpha^2 I + \Omega)^{-1} \Phi^T P_0 e^{-\alpha t}$
 A solução geral é dada por:
 $X = \text{cos}(\sqrt{\Omega} t) c_1 + \text{sen}(\sqrt{\Omega} t) c_2 + (\alpha^2 I + \Omega)^{-1} \Phi^T P_0 e^{-\alpha t}$

Figura 10. Solução da EDO da treliça biapoada com balanço. Fonte: os Autores (2025).

Na Figura 11 são representadas as curvas do deslocamento vertical no nó em que o carregamento dinâmico é aplicado com relação ao tempo, obtidas com os métodos Superposição Modal, Aceleração Linear, Houbolt, Wilson- θ e Bathe. Considera-se o incremento de tempo $\Delta t = 5,0 \times 10^{-5}$ s para os métodos de integração direta no tempo. Nota-se a boa proximidade entre as respostas obtidas com os métodos implementados e os fornecidos por Santos (2022)²⁷.

4. DISCUSSÃO

A solução pelo método da Superposição Modal baseia-se na determinação das frequências naturais e dos respectivos modos de vibração dos sistemas estruturais. Esse método parte da premissa de que a configuração deformada da estrutura, em um dado instante de tempo sob ação de um carregamento dinâmico, pode ser representada como a soma das configurações correspondentes a diferentes modos de vibração. À vista

disso, o método se destaca por introduzir uma mudança de variáveis que tem como objetivo desacoplar o sistema original de equações diferenciais, facilitando sua resolução e interpretação.

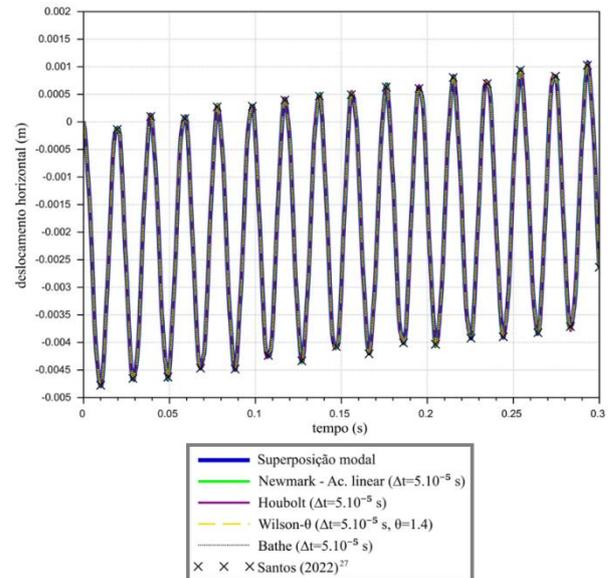


Figura 11. Curva tempo versus deslocamento da treliça biapoada com balanço. Fonte: os Autores (2025).

Uma das principais vantagens da Superposição Modal é a possibilidade de calcular a resposta dinâmica da estrutura em um instante específico sem a necessidade de conhecer as respostas em tempos anteriores, diferentemente dos métodos de integração direta, que exigem a atualização contínua dos estados anteriores para a obtenção dos resultados futuros. Essa característica reduz significativamente o tempo de processamento computacional, tornando o método especialmente eficiente na análise estrutural de sistemas de grande porte ou com elevado número de graus de liberdade.

O método da Superposição Modal é amplamente utilizado em aplicações que envolvem análise de vibrações e resposta dinâmica de estruturas submetidas a excitações transitórias ou harmônicas, como edifícios sujeitos a tremores, pontes sob ação de ventos e equipamentos mecânicos expostos a cargas dinâmicas. Sua implementação computacional permite não apenas a obtenção de resultados precisos, mas também uma melhor compreensão do comportamento estrutural, sendo uma ferramenta essencial em projetos de engenharia civil.

No que tange ao método de Bathe, esse é um esquema composto por dois passos. Para um problema linear, e para um determinado intervalo de tempo, o custo computacional do procedimento do método de Bathe é duas vezes maior que o método constituído por única etapa. No entanto, as características de precisão e de estabilidade desse método são tais que podem ser empregados intervalos maiores de tempo e o esquema é, em geral, bastante eficaz para soluções de problemas não lineares.

Sob outra perspectiva, o conteúdo abordado neste artigo apresenta um potencial didático-pedagógico para

uma disciplina de análise dinâmica, visto que combina a fundamentação teórica dos métodos numéricos com dois estudos de caso de treliças planas. Essa abordagem permite que os alunos desenvolvam uma compreensão aprofundada dos fenômenos dinâmicos em estruturas e da modelagem computacional necessária para analisá-los.

A utilização do Método da Superposição Modal, juntamente com métodos de integração temporal, como os de Newmark, Houbolt, Wilson- θ e de Bathe, oferece um panorama abrangente das principais técnicas numéricas empregadas na solução da equação do movimento. Esse aspecto é crucial para o ensino da dinâmica estrutural, porquanto possibilita aos alunos compararem diferentes métodos quanto à estabilidade, precisão e eficiência computacional. Outrossim, ao trabalhar com o Método dos Elementos Finitos para a discretização das treliças, os estudantes são incentivados a compreender a formulação matemática das equações diferenciais e sua conversão em sistemas de equações algébricas.

5. CONCLUSÃO

O presente artigo apresentou um procedimento numérico-computacional baseado no Método da Superposição Modal para a análise linear dinâmica de estruturas do tipo treliça. A metodologia proposta demonstrou-se eficiente na obtenção da resposta dinâmica das estruturas, evidenciando as vantagens da Superposição Modal em relação aos métodos de integração direta, especialmente no que diz respeito à redução do custo computacional e à facilidade de interpretação dos resultados.

Os experimentos numéricos realizados com o Scilab permitiram validar a implementação dos algoritmos e demonstrar a precisão das soluções obtidas. A comparação entre diferentes métodos numéricos, como os de Newmark, Houbolt, Wilson- θ e Bathe, reforçou a importância da escolha criteriosa do método de integração, considerando aspectos como estabilidade, precisão e custo computacional. Observou-se que o método de Bathe, apesar de exigir maior custo computacional, apresenta vantagens em termos de estabilidade e precisão, sendo uma alternativa viável para problemas não lineares.

Além da contribuição técnica, o estudo possui um potencial didático-pedagógico para disciplinas de análise dinâmica. A combinação entre a fundamentação teórica dos métodos numéricos e a aplicação em estudos de casos de treliças planas permite que os alunos desenvolvam uma compreensão mais aprofundada dos fenômenos dinâmicos e da modelagem computacional. O uso do Método dos Elementos Finitos e a implementação dos algoritmos no Scilab oferecem um ambiente propício para o aprendizado ativo, permitindo que os estudantes explorem diferentes abordagens e compreendam os impactos das decisões numéricas nos resultados.

Dessa forma, este artigo contribui tanto para a área de análise dinâmica estrutural quanto para o ensino da

engenharia, proporcionando um material de referência para futuros estudos e aplicações em modelagem computacional de estruturas submetidas a carregamentos dinâmicos.

Como sugestões para pesquisa futura, destacam-se: a inclusão do efeito do amortecimento estrutural por meio do modelo de Rayleigh; a consideração da não linearidade física, utilizando modelos constitutivos baseados na Elastoplasticidade e na Mecânica do Dano; a consideração da não linearidade geométrica, por meio das formulações Posicional e Corrotacional do MEF; e a investigação da resposta dinâmica de treliças espaciais.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Universidade Tecnológica Federal do Paraná e à Fundação Araucária (PIBIC FA - F. Araucária/Bolsa de Iniciação Científica) pelo apoio financeiro no desenvolvimento desta pesquisa.

7. REFERÊNCIAS

- [1] Rezaiee-Pajand M, Hashemian M, Bohluly A. A novel time integration formulation for nonlinear dynamic analysis. *Aerospace Science and Technology*. 2017; 69: 625-635.
- [2] Martinelli LB, Alves EC. Programa computacional para análise dinâmica de estruturas treliçadas. *Simpósio de Mecânica Computacional, XIII SIMMEC, UFES, Campus Goiabeiras, Vitória, ES*. 2018. [acesso 25 ago. 2025]. Disponível em: <https://doity.com.br/anais/xiiisimmec2018/trabalho/68330>
- [3] Oliveira LD, Silva WA, Silva WTM, *et al.* Análise dinâmica não linear geométrica de treliças planas. *REEC-Revista Eletrônica de Engenharia Civil*. 2017; 13(2): 84-98.
- [4] Sangeetha P, Kumar PN, Senthil R. Finite element analysis of space truss using matlab. *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2015; 10(8): 3812-3816.
- [5] Li QS, Zhi LH, Tuan AY, *et al.* Dynamic behavior of Taipei 101 tower: Field measurement and numerical analysis. *Journal of Structural Engineering*. 2011; 137(1): 143-155.
- [6] Netto ABR, Araujo RR. Comparação das frequências naturais e modos de vibração de vigas metálicas biapoiadas com uma e duas almas senoidais utilizando o ANSYS. *Projectus*. 2018; 3(1): 125-139.
- [7] Souza LAF. Análise dinâmica não linear de estruturas reticuladas por meio do elemento finito corrotacional considerando o cisalhamento e diferentes matrizes de massa. *REEC-Revista Eletrônica de Engenharia Civil*. 2023; 19(2): 1-20.
- [8] Li L, Hu YJ, Wang XL. Frequency response sensitivity: an accurate complex modal superposition method. In: *Proceeding of the Twelfth International Conference on Computational Structures Technology, Naples, Italy*. 2014.
- [9] Newmark NM. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering mechanics division*. 1959; 85(3): 67-94.
- [10] Wilson EL, Farhoomand I, Bathe KJ. Nonlinear dynamic analysis of complex structures. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. 1972; 1(3): 241-252.
- [11] Wilson EL. A computer program for the dynamic stress analysis of underground structures. *Technical report*,

- California Univ Berkeley Structural Engineering Lab. 1968.
- [12] Ding ZX, Du ZL, Su W, *et al.* An improved explicit-implicit precise integration method for nonlinear dynamic analysis of structures. *Advanced Steel Construction*. 2020; 16(3): 191-205.
- [13] Debella LC, Cittadin CC, Arndt M, *et al.* Transient dynamic analysis of bars and trusses by the adaptive generalized finite element method. *Engineering Computations*. 2019; 37(3): 789-821.
- [14] Xing Y, Yao L, Ji Y. A solution strategy combining the mode superposition method and time integration methods for linear dynamic systems. *Acta Mechanica Sinica*. 2022; 38(6): 521433.
- [15] Tahaye Abadi M. An analytical solution method for transient response of truss-type space frame structures. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2023; 45(5): 259.
- [16] Malla RB, Agarwal P, Ahmad R. Dynamic analysis methodology for progressive failure of truss structures considering inelastic postbuckling cyclic member behavior. *Engineering Structures*. 2011; 33(5): 1503-1513.
- [17] Scilab, versão 2025.1.0. Dassault Systèmes, 2025.
- [18] Soriano HL. *Introdução à dinâmica das estruturas*. Rio de Janeiro: Elsevier. 2014.
- [19] Houbolt JC. A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. *Journal of the Aeronautical Sciences*. 1950; 17(9): 540-550.
- [20] Bathe KJ. *Finite element procedures*. Watertown, MA: Prentice Hall. 2016.
- [21] Rao SS. *Mechanical Vibrations*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall. 2011.
- [22] Zienkiewicz OC, Taylor RL, Zhu JZ. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Burlington, MA: Elsevier Butterworth-Heinemann. 2005.
- [23] Lee C, Bathe KJ, Noh G. Stability of the Bathe implicit time integration methods in the presence of physical damping. *Computers & Structures*. 2024; 295: 107294.
- [24] Souza LAF. Análise modal e transiente de shear building com o sistema passivo AMS. *Journal of Exact Sciences*. 2024; 42(2): 11-20.
- [25] Souza LAF. Modelo numérico-computacional para a análise modal e transiente de shear building utilizando o programa Scilab. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*. 2024; 46.
- [26] Marques JME, Marczak RJ. Uma metodologia para comparação entre modelos de elementos finitos com aplicação na simulação dinâmica de implementos rodoviários. *Blucher Engineering Proceedings*. 2016; 3(1): 212-231.
- [27] Santos AC. Implementação de código computacional para análise dinâmica linear de treliças planas via método dos elementos finitos. [monografia] Campo Mourão: Universidade Tecnológica Federal do Paraná. 2022.