

ANÁLISE MODAL E TRANSIENTE DE SHEAR BUILDING COM O SISTEMA PASSIVO AMS

MODAL AND TRANSIENT ANALYSIS OF SHEAR BUILDING WITH THE TMD PASSIVE SYSTEM

LUIZ ANTONIO FARANI DE SOUZA^{1*}

1. Professor do curso de graduação em Engenharia Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Professor do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PCV da Universidade Estadual de Maringá.

* Rua Marcílio Dias, 635, Jardim Paraíso, Apucarana, PR, Brasil. CEP: 86812-460. Avenida Colombo, nº 5790, Campus Universitário, Maringá, PR, Brasil. CEP 87020-900. lasouza@utfpr.edu.br

Recebido em 19/06/2024. Aceito para publicação em 09/07/2024

RESUMO

As vibrações de estruturas submetidas a cargas dinâmicas são de grande interesse, sobretudo nos casos em que a ressonância e as vibrações excessivas resultam na diminuição da vida útil das mesmas. O sistema de controle passivo Amortecedor de Massa Sintonizado (AMS) é um sistema popular e amplamente utilizado na Engenharia Civil. Nesse contexto, este artigo tem o propósito de apresentar um modelo numérico-computacional para a análise dinâmica modal e transiente de *shear building* associado ao dispositivo passivo AMS instalado no seu topo. Os parâmetros ótimos de massa, amortecimento e rigidez do AMS são determinados. O amortecimento na estrutura é considerado por meio da aproximação de Rayleigh. A equação do movimento é solucionada por métodos implícitos de integração direta passo a passo, quais sejam: Aceleração Média Constante, Aceleração Linear, Aceleração Regressiva, Wilson- θ e Bathe. Um código computacional é desenvolvido com programa livre Scilab. Os resultados numéricos mostram que o sistema AMS reduz a amplitude máxima das estruturas submetidas a carregamento dinâmico. Essa redução é obtida transferindo parte da energia vibracional da estrutura principal para esse dispositivo.

PALAVRAS-CHAVE: *Shear building*; análise dinâmica; amortecimento de Rayleigh; sistema AMS; método de integração de Bathe.

ABSTRACT

The vibrations of structures subjected to dynamic loads are of great interest, especially in cases where resonance and excessive vibrations result in a reduction in their useful life. The Tuned Mass Damper (TMD) passive control system is a popular and widely used system in Civil Engineering. In this context, this paper aims to present a numerical-computational model for the modal and transient dynamic analysis of shear building associated with the TMD passive device installed on top. Damping in the structure is considered using the Rayleigh approximation. The equation of motion is solved by step-by-step direct integration implicit methods, namely: Constant Average Acceleration, Linear Acceleration, Backward Acceleration, Wilson- θ

and Bathe. A computational code is developed with the Scilab open-source program. Numerical results show that the AMS system reduces the maximum amplitude of structures subjected to dynamic load. This reduction is achieved by transferring part of the vibrational energy of the main structure to this device.

KEYWORDS: Shear building; Dynamic analysis; Rayleigh damping; TMD system; Bathe's integration method.

1. INTRODUÇÃO

A análise de sistemas vibracionais tem grande destaque na Engenharia Civil. Vibrações estão presentes no projeto de estruturas de edifícios muito altos, por exemplo. As aplicações do estudo de vibrações são diversas, entre as quais podem-se destacar: a análise de curvas de ressonância para evitar colapsos em estruturas; e a busca de relações adequadas de amortecimento, rigidez e massa para proporcionar segurança e conforto durante a vida útil da edificação¹.

Vibrações excessivas podem gerar danos críticos à estrutura de um edifício e, até mesmo, o colapso estrutural ocasionando perdas econômicas e/ou perdas de vidas em situações extremas. A vibração excessiva em edifícios altos é em geral induzida por forças externas, como terremotos e vento. No que diz respeito às cargas dinâmicas, quando as frequências de excitação se igualam às primeiras frequências naturais do edifício, fenômenos de ressonância podem ocorrer levando a danos potencialmente catastróficos².

Para aumentar a segurança e a funcionalidade da estrutura, o controle de vibração dos sistemas estruturais tem sido considerado há muito tempo pelos projetistas estruturais, o que serve como grande competitividade tecnológica^{3,4,5}.

Estruturas civis cada vez mais flexíveis e esbeltas há na atualidade. Uma elevada flexibilidade estrutural leva a grandes amplitudes de vibração que podem ser transmitidas às pessoas nos edifícios, causando desconforto, perda de eficiência no trabalho devido ao cansaço e graves alterações de saúde. Em estruturas de

edifícios projetadas tradicionalmente, a redução da enorme energia de vibração é inadequada devido à sua capacidade de absorção de energia muito limitada. A incorporação de dispositivos de amortecimento suplementares é uma estratégia bem estabelecida para o controle de vibrações em estruturas de edifícios. Nesse sentido, o uso de sistemas de dissipação de energia passivos, semiativos, ativos ou híbridos tem ganhado cada vez mais destaque nas estruturas de Engenharia Civil⁶.

Os sistemas de controle passivo são os mais comuns entre os dispositivos de controle estrutural e funcionam dissipando a energia vibratória⁴. O Amortecedor de Massa Sintonizado (AMS) destaca-se como um dos mecanismos de amortecimento amplamente adotado. A configuração do AMS compreende uma massa interligada ao sistema por meio de uma mola e um amortecedor viscoso⁷. No que concerne ao projeto dinâmico de estruturas, é de suma importância obter os valores ótimos da massa, da frequência e do amortecimento do AMS⁵.

Considerando a ampla disponibilidade de poderosas ferramentas computacionais e *softwares*, é possível utilizar modelos mais complexos (por exemplo, os modelos de elementos finitos planos ou sólidos) para realizar análises dinâmicas de sistemas estruturais. No entanto, se o objetivo for obter respostas estruturais apenas no nível do piso do edifício, o uso de hipóteses de modelagem simplificadas, como o conceito de *shear building*, é conveniente nesses casos⁸.

Nos modelos de *shear building*, as lajes são modeladas como massas concentradas. Os pilares, por sua vez, são modelados como molas elásticas que apenas apresentam deformações na direção horizontal quando submetidas a forças laterais. A massa concentrada do piso de laje é definida como a soma das massas entre a metade superior e a metade inferior do mesmo⁹. Assim, o *shear building* é um modelo estrutural simples e bem mais rígido do que a estrutura real, devido à consideração de pisos indeformáveis e pilares inextensíveis^{10,11}.

Esta pesquisa tem por escopo apresentar um modelo numérico-computacional para as análises dinâmicas modal e transiente de *shear building* associado ao dispositivo passivo AMS instalado no seu topo. Os parâmetros ótimos desse dispositivo são determinados conforme o método proposto por Den Hartog (1956)¹². O amortecimento na estrutura é considerado por meio da aproximação de Rayleigh, em que a matriz de amortecimento consiste na combinação linear das matrizes de massa e de rigidez da estrutura¹³.

A equação do movimento para o *shear building* com o AMS¹⁴ é apresentada. As respostas das análises transientes são obtidas com os algoritmos dos seguintes métodos numéricos: Aceleração Média Constante, Aceleração Linear, Aceleração Regressiva (Liu; Li; Zhao, 2013)¹⁵, Wilson- θ (Wilson; Farhoomand; Bathe, 1973)¹⁶ e Bathe (Bathe, 1996)¹⁷. As frequências naturais das estruturas são determinadas utilizando a função *spec* do Scilab e o algoritmo do método de Jacobi na sua

forma generalizada¹¹.

Simulações de dois problemas de *shear building* com um AMS encontrados na literatura são efetuadas pelo código computacional desenvolvido com o programa livre Scilab¹⁸. A metodologia abordada com um único dispositivo de controle passivo AMS mostrou-se eficaz no controle da vibração da estrutura principal, reduzindo a amplitude máxima durante a vibração da mesma. O AMS possui frequência fixa e características de amortecimento, podendo ser utilizado para sintonizar apenas uma determinada frequência fixa de vibração, normalmente a frequência fundamental de vibração da estrutura principal.

2. MATERIAL E MÉTODOS

A metodologia empregada para a análise dinâmica linear de estrutura do tipo *shear building* combinado com um AMS é descrita nesta seção.

Equação do movimento e métodos de solução

A resposta de deslocamento da estrutura é, em última análise, representada por um conjunto discreto de variáveis, que podem ser consideradas as componentes de um vetor de deslocamento relativo generalizado $\mathbf{u}(t)$. Então, as equações de movimento para o sistema estrutural discretizado, sujeitas à excitação de base uniforme e às forças variáveis no tempo, podem ser escritas por¹⁴:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{u} = -(\mathbf{M} + \bar{\mathbf{M}})\ddot{\mathbf{u}}_g + \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (1)$$

sendo \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, do sistema estrutura principal e $\mathbf{\Gamma}$ simboliza uma matriz de operadores que modelam os amortecedores passivos presentes na estrutura. O vetor $\ddot{\mathbf{u}}_g$ contém a contribuição de corpo rígido do deslocamento sísmico do solo para cada grau de liberdade e \mathbf{F}_{ext} inclui as forças devido ao carregamento aerodinâmico. A matriz $\bar{\mathbf{M}}$ representa a massa dos controladores passivos.

Há diversas abordagens que podem ser adotadas para resolver a Equação (1). Uma abordagem supõe que os amortecedores passivos podem ser modelados como funções lineares diretas dos vetores aceleração $\ddot{\mathbf{u}}$, velocidade $\dot{\mathbf{u}}$ e deslocamento \mathbf{u} , tal que $\mathbf{\Gamma}\mathbf{u}$ é dado por¹⁴:

$$\mathbf{\Gamma}\mathbf{u} = \bar{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{K}}\mathbf{u} \quad (2)$$

A Equação (1) é reescrita utilizando a Equação (2) resultando em:

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{K}}\mathbf{u} = -\hat{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}}_g + \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (3)$$

na qual:

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \bar{\mathbf{M}} \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + \bar{\mathbf{C}} \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \bar{\mathbf{K}} \quad (6)$$

A Equação (3) representa um conjunto de n equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. No caso linear, assume-se que todos os coeficientes das matrizes associados à estrutura primária (\mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K}) e aos elementos de controle passivo

($\bar{\mathbf{M}}$, $\bar{\mathbf{C}}$ e $\bar{\mathbf{K}}$) são constantes. Aqui, o vetor $\bar{\mathbf{u}}_g$ é adotado igual ao vetor nulo $\mathbf{0}$.

A solução do sistema dado em Equação (3), cujas incógnitas são $\mathbf{u}(t)$, $\dot{\mathbf{u}}(t)$ e $\ddot{\mathbf{u}}(t)$, é obtida por procedimentos de integração direta passo a passo. Nesses procedimentos, ao invés de resolver a equação do movimento em qualquer tempo t , busca-se solucioná-la em intervalos de tempo discretos Δt separadamente.

Para a aplicação dos métodos de integração direta, são determinadas as matrizes $\bar{\mathbf{K}}$, $\bar{\mathbf{M}}$ e $\bar{\mathbf{C}}$, sendo inicialmente aplicadas condições iniciais no tempo zero, denotadas pelos vetores ${}^0\mathbf{u}$, ${}^0\dot{\mathbf{u}}$ e ${}^0\ddot{\mathbf{u}}$. Na análise transiente, o tempo total t_{total} é subdividido em N intervalos (isto é, o incremento $\Delta t = t_{total}/N$). Assim, a solução é obtida nos tempos discretos $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, N\Delta t$ ¹⁹.

Um método implícito amplamente utilizado para dinâmica estrutural é o método de Newmark. Para iniciar esse método, o vetor $\dot{\mathbf{u}}$ em $t = 0$ é calculado por:

$${}^0\ddot{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{M}}^{-1} [{}^0\mathbf{F}_{ext} - \bar{\mathbf{C}} {}^0\dot{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{K}} ({}^0\mathbf{u})] \quad (7)$$

Para o instante de tempo atual ($t + \Delta t$), as expressões de Newmark para o deslocamento \mathbf{u} e a velocidade $\dot{\mathbf{u}}$ são dadas por, respectivamente:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta t {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) {}^t\ddot{\mathbf{u}} + \Delta t^2 \beta {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \quad (8)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t (1 - \gamma) {}^t\ddot{\mathbf{u}} + \Delta t \gamma {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \quad (9)$$

em que β e γ são constantes referentes ao método em questão^{17,19}. Na família de Newmark existem diversas particularizações no que diz respeito aos valores dessas constantes¹⁵. Na Tabela 1 são descritos três métodos dessa família e na Figura 1 é apresentado o algoritmo dos mesmos, os quais diferem entre si pelos valores adotados para as constantes β e γ .

Tabela 1. Métodos da família de Newmark.

Método	tipo	β	γ	Ordem de precisão
Aceleração Média Constante	implícito	1/4	1/2	2
Aceleração Linear	implícito	1/6	1/2	2
Aceleração Regressiva	implícito	1/2	1/2	2

Fonte: Liu, Li & Zhao (2013)¹⁵.

O método de Wilson- θ é essencialmente uma extensão do método de Aceleração Linear, em que uma variação linear da aceleração do tempo t para $(t + \Delta t)$ é assumida.

Os vetores velocidade $\dot{\mathbf{u}}$ e deslocamento \mathbf{u} são determinados no tempo $(t + \theta\Delta t)$ pelas seguintes equações, respectivamente¹⁷:

$${}^{t+\theta\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = {}^t\dot{\mathbf{u}} + \frac{\theta\Delta t}{2} ({}^{t+\theta\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} + {}^t\ddot{\mathbf{u}}) \quad (10)$$

$${}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \theta\Delta t {}^t\dot{\mathbf{u}} + \frac{(\theta\Delta t)^2}{6} ({}^{t+\theta\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} + 2{}^t\ddot{\mathbf{u}}) \quad (11)$$

Para que esse método tenha estabilidade incondicional, deve-se adotar o parâmetro $\theta \geq 1,37$.

Pode-se resolver para ${}^{t+\theta\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}$ e ${}^{t+\theta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}$ em termos de ${}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{u}$ da seguinte forma:

$${}^{t+\theta\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} ({}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{u} - {}^t\mathbf{u}) - \frac{6}{\theta\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{u}} - 2{}^t\ddot{\mathbf{u}} \quad (12)$$

$${}^{t+\theta\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = \frac{3}{\theta\Delta t} ({}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{u} - {}^t\mathbf{u}) - 2{}^t\dot{\mathbf{u}} - \frac{\theta\Delta t}{2} {}^t\ddot{\mathbf{u}} \quad (13)$$

Entrada: $\Delta t, \bar{\mathbf{K}}, \bar{\mathbf{M}}, \bar{\mathbf{C}}, {}^0\mathbf{u}, {}^0\dot{\mathbf{u}}, {}^0\mathbf{F}_{ext}$
 Saída: $\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}$
 Casos especiais:
 - Método de Aceleração média constante: $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$
 - Método de Aceleração linear: $\beta = 1/6$ e $\gamma = 1/2$
 - Método de Liu *et al.* (2013) : $\beta = 1/2$ e $\gamma = 1/2$
 1. Determine o vetor aceleração para $t = 0$:
 ${}^0\ddot{\mathbf{u}} \leftarrow \bar{\mathbf{M}}^{-1} ({}^0\mathbf{F}_{ext} - \bar{\mathbf{C}} {}^0\dot{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{K}} {}^0\mathbf{u})$
 2. Seleccione Δt e com os valores de β e γ calcule as matrizes \mathbf{a}_i :
 $\mathbf{a}_1 \leftarrow \frac{1}{\beta\Delta t^2} \bar{\mathbf{M}} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \bar{\mathbf{C}}$; $\mathbf{a}_2 \leftarrow \frac{1}{\beta\Delta t} \bar{\mathbf{M}} + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \bar{\mathbf{C}}$; $\mathbf{a}_3 \leftarrow \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \bar{\mathbf{M}} + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \bar{\mathbf{C}}$
 3. Determine a matriz de rigidez efetiva:
 $\mathbf{K}_{ef} \leftarrow \bar{\mathbf{K}} + \mathbf{a}_1$
 4. Para cada passo de tempo faça:
 4.1 Determine o vetor de forças efetivas no tempo $(t + \Delta t)$:
 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ef} \leftarrow {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ext} + \mathbf{a}_1 {}^t\mathbf{u} + \mathbf{a}_2 {}^t\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{a}_3 {}^t\ddot{\mathbf{u}}$
 4.2 Resolva o sistema de equações lineares no tempo $(t + \Delta t)$:
 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} \leftarrow [\mathbf{K}_{ef}]^{-1} {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ef}$
 4.3 Calcule os deslocamentos, velocidades e acelerações no tempo $(t + \Delta t)$:
 ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} \leftarrow \frac{\gamma}{\beta\Delta t} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^t\mathbf{u}) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) {}^t\ddot{\mathbf{u}}$
 ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \leftarrow \frac{1}{\beta\Delta t^2} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^t\mathbf{u}) - \frac{1}{\beta\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{u}} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) {}^t\ddot{\mathbf{u}}$

Figura 1. Algoritmo dos métodos da família de Newmark. Fonte: Bathe (1996)¹⁷.

Para obter a solução dos deslocamentos, velocidades e acelerações no tempo $(t + \Delta t)$, as equações de equilíbrio em Equação (3) são consideradas no tempo $(t + \theta\Delta t)$. Na Figura 2 aparece o algoritmo do método de Wilson- θ . Nota-se que para $\theta = 1$ o método de Wilson- θ recai no método de Aceleração Linear¹⁷.

O método de Bathe utiliza duas subetapas para cada tempo de integração Δt . Na primeira subetapa, utiliza-se a regra trapezoidal de Newmark e na segunda subetapa, emprega-se a regra de Euler de três pontos regressivo. Os vetores velocidade $\dot{\mathbf{u}}$ e deslocamento \mathbf{u} no tempo $(t + \Delta t/2)$ são determinados por, respectivamente (primeira subetapa):

$${}^{t+\Delta t/2}\dot{\mathbf{u}} = {}^t\dot{\mathbf{u}} + \frac{\Delta t}{4} ({}^t\ddot{\mathbf{u}} + {}^{t+\Delta t/2}\ddot{\mathbf{u}}) \quad (14)$$

$${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \frac{\Delta t}{4} ({}^t\dot{\mathbf{u}} + {}^{t+\Delta t/2}\dot{\mathbf{u}}) \quad (15)$$

Com relação à segunda subetapa, os vetores velocidade $\dot{\mathbf{u}}$ e aceleração $\ddot{\mathbf{u}}$ são avaliados no tempo $(t + \Delta t)$ por, respectivamente:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{\Delta t} {}^t\mathbf{u} - \frac{4}{\Delta t} {}^{t+\Delta t/2}\mathbf{u} + \frac{3}{\Delta t} {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} \quad (16)$$

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} = \frac{1}{\Delta t} {}^t\ddot{\mathbf{u}} - \frac{4}{\Delta t} {}^{t+\Delta t/2}\ddot{\mathbf{u}} + \frac{3}{\Delta t} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \quad (17)$$

Entrada: $\Delta t, \hat{R}, \hat{M}, \hat{C}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{F}_{ext}$
 Saída: $\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}$

1. Calcule as constantes a_i com $\theta = 1,4$:
 $a_0 \leftarrow \frac{6}{(\theta\Delta t)^2}; a_1 \leftarrow \frac{3}{\theta\Delta t}; a_2 \leftarrow 2a_1; a_3 \leftarrow \frac{\theta\Delta t}{2}; a_4 \leftarrow \frac{a_0}{\theta};$
 $a_5 \leftarrow \frac{-a_2}{\theta}; a_6 \leftarrow 1 - \frac{3}{\theta}; a_7 \leftarrow \frac{\Delta t}{2}; a_8 \leftarrow \frac{\Delta t^2}{6}$
2. Calcule a matriz de rigidez efetiva:
 $\mathbf{K}_{ef} \leftarrow \hat{R} + a_0\hat{M} + a_1\hat{C}$
3. Para cada passo de tempo faça:
 3.1 Determine o vetor de forças efetivas no tempo $(t + \theta\Delta t)$:
 ${}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{F}_{ef} \leftarrow {}^t\mathbf{F}_{ext} + \theta({}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ext} - {}^t\mathbf{F}_{ext})$
 $+ \hat{M}(a_0{}^t\mathbf{u} + a_2{}^t\dot{\mathbf{u}} + 2{}^t\ddot{\mathbf{u}})$
 $+ \hat{C}(a_1{}^t\mathbf{u} + 2{}^t\dot{\mathbf{u}} + a_3{}^t\ddot{\mathbf{u}})$
- 3.2 Resolva o sistema de equações lineares no tempo $(t + \theta\Delta t)$:
 ${}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{u} \leftarrow [\mathbf{K}_{ef}]^{-1}{}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{F}_{ef}$
- 3.3 Calcule os deslocamentos, velocidades e acelerações no tempo $(t + \Delta t)$:
 ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \leftarrow a_4({}^{t+\theta\Delta t}\mathbf{u} - {}^t\mathbf{u}) + a_5{}^t\dot{\mathbf{u}} + a_6{}^t\ddot{\mathbf{u}}$
 ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} \leftarrow {}^t\dot{\mathbf{u}} + a_7({}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} + {}^t\ddot{\mathbf{u}})$
 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} \leftarrow {}^t\mathbf{u} + \Delta t{}^t\dot{\mathbf{u}} + a_8({}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} + 2{}^t\ddot{\mathbf{u}})$

Figura 2. Algoritmo do método de Wilson- θ . Fonte: Bathe (1996)¹⁷.

As equações de equilíbrio no tempo $(t + \Delta t/2)$ são dadas por:

$$\left(\frac{16}{\Delta t^2}\hat{M} + \frac{4}{\Delta t}\hat{C} + \hat{R}\right) {}^{t+\Delta t/2}\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t/2}\mathbf{F}_{ef} \quad (18)$$

com

$${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{F}_{ef} = {}^{t+\Delta t/2}\mathbf{F}_{ext} + \frac{16}{\Delta t^2}\hat{M}{}^t\mathbf{u} + \frac{8}{\Delta t}\hat{M}{}^t\dot{\mathbf{u}} + \hat{M}{}^t\ddot{\mathbf{u}} + \frac{4}{\Delta t}\hat{C}{}^t\mathbf{u} + \hat{C}{}^t\dot{\mathbf{u}} \quad (19)$$

No tempo $(t + \Delta t)$, as equações de equilíbrio são escritas por:

$$\left(\frac{9}{\Delta t^2}\hat{M} + \frac{3}{\Delta t}\hat{C} + \hat{R}\right) {}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ef} \quad (20)$$

com

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ef} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ext} + \frac{12}{\Delta t^2}\hat{M}{}^{t+\Delta t/2}\mathbf{u} - \frac{3}{\Delta t^2}\hat{M}{}^t\mathbf{u} + \frac{4}{\Delta t}\hat{M}{}^{t+\Delta t/2}\dot{\mathbf{u}} - \frac{1}{\Delta t}\hat{M}{}^t\dot{\mathbf{u}} + \frac{4}{\Delta t}\hat{C}{}^{t+\Delta t/2}\mathbf{u} - \frac{1}{\Delta t}\hat{C}{}^t\mathbf{u} \quad (21)$$

O algoritmo do esquema completo da solução do método de Bathe é apresentado na Figura 3.

Dimensionamento do controlador passivo AMS

O sistema convencional de Amortecedor de Massa Sintonizado (AMS) é um sistema de controle passivo popular e amplamente utilizado na Engenharia Civil, notadamente em edifícios altos. O sistema consiste em uma massa, uma mola linear e um amortecedor viscoso⁵. Esse tipo de amortecedor é fixado à estrutura principal e atua na dissipação de energia quando essa é submetida a uma excitação externa.

A instalação de um AMS em uma estrutura objetiva diminuir a amplitude do pico de ressonância para o menor valor fisicamente possível, a fim de que as amplificações sejam menores ao longo de uma faixa mais ampla de frequência próxima à de ressonância. Há vários métodos para obter os parâmetros ótimos do

dispositivo AMS, entre os quais destaca-se o proposto por Den Hartog (1956)¹².

Entrada: $\Delta t, \hat{R}, \hat{M}, \hat{C}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{F}_{ext}$
 Saída: $\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}$

1. Calcule as constantes a_i :
 $a_0 \leftarrow \frac{16}{\Delta t^2}; a_1 \leftarrow \frac{4}{\Delta t}; a_2 \leftarrow \frac{9}{\Delta t^2}; a_3 \leftarrow \frac{3}{\Delta t}; a_4 \leftarrow 2a_1;$
 $a_5 \leftarrow \frac{12}{\Delta t^2}; a_6 \leftarrow -\frac{3}{\Delta t^2}; a_7 \leftarrow -\frac{1}{\Delta t}$
2. Calcule a matrizes de rigidez \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 :
 $\mathbf{K}_1 \leftarrow a_0\hat{M} + a_1\hat{C} + \hat{R}; \mathbf{K}_2 \leftarrow a_2\hat{M} + a_3\hat{C} + \hat{R}$
3. Para cada passo de tempo faça:
Primeira subetapa:
 3.1 Determine o vetor de forças efetivas no tempo $(t + \Delta t/2)$:
 ${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{F}_{ef} \leftarrow {}^{t+\Delta t/2}\mathbf{F}_{ext} + \hat{M}(a_0{}^t\mathbf{u} + a_4{}^t\dot{\mathbf{u}} + {}^t\ddot{\mathbf{u}})$
 $+ \hat{C}(a_1{}^t\mathbf{u} + {}^t\dot{\mathbf{u}})$
- 3.2 Resolva o sistema de equações lineares no tempo $(t + \Delta t/2)$:
 ${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{u} \leftarrow [\mathbf{K}_1]^{-1}{}^{t+\Delta t/2}\mathbf{F}_{ef}$
- 3.3 Calcule as velocidades e acelerações no tempo $(t + \Delta t/2)$:
 ${}^{t+\Delta t/2}\dot{\mathbf{u}} \leftarrow a_1({}^{t+\Delta t/2}\mathbf{u} - {}^t\mathbf{u}) - {}^t\dot{\mathbf{u}}$
 ${}^{t+\Delta t/2}\ddot{\mathbf{u}} \leftarrow a_1({}^{t+\Delta t/2}\dot{\mathbf{u}} - {}^t\dot{\mathbf{u}}) - {}^t\ddot{\mathbf{u}}$
- Segunda subetapa:**
 3.4 Determine o vetor de forças efetivas no tempo $(t + \Delta t)$:
 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ef} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ext} + \hat{M}(a_5{}^{t+\Delta t/2}\mathbf{u} + a_6{}^t\mathbf{u} + a_1{}^{t+\Delta t/2}\dot{\mathbf{u}} + a_7{}^t\dot{\mathbf{u}}) + \hat{C}(a_1{}^{t+\Delta t/2}\mathbf{u} + a_7{}^t\mathbf{u})$
- 3.5 Resolva o sistema de equações lineares no tempo $(t + \Delta t)$:
 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} \leftarrow [\mathbf{K}_2]^{-1}{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ef}$
- 3.6 Calcule as velocidades e acelerações no tempo $(t + \Delta t)$:
 ${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = -a_7{}^t\dot{\mathbf{u}} - a_1{}^{t+\Delta t/2}\dot{\mathbf{u}} + a_3{}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}}$
 ${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} = -a_7{}^t\ddot{\mathbf{u}} - a_1{}^{t+\Delta t/2}\ddot{\mathbf{u}} + a_3{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}$

Figura 3. Algoritmo do método de Bathe. Fonte: Bathe (1996)¹⁷.

Nesse método, a razão de frequência ótima α é expressa por:

$$\alpha = \frac{1}{1 + \mu} \quad (22)$$

na qual μ é a razão de massa dada por:

$$\mu = \frac{m_{AMS}}{m_{est}} \quad (23)$$

sendo m_{AMS} a massa do AMS e m_{est} a massa total da estrutura. A razão ótima de amortecimento $\xi_{ótimo}$ do AMS é estimada por:

$$\xi_{ótimo} = \sqrt{\frac{3\mu}{8 + 8\mu}} \quad (24)$$

A frequência natural do AMS ω_{AMS} é calculada por:

$$\omega_{AMS} = \alpha\omega_{est} \quad (25)$$

na qual ω_{est} é a frequência natural do sistema estrutural.

Com a massa previamente adotada m_{AMS} , as propriedades de rigidez k_{AMS} e de amortecimento c_{AMS} de um AMS otimizado são obtidos por meio das seguintes equações, respectivamente²⁰:

$$k_{AMS} = \omega_{AMS}^2 m_{AMS} \quad (26)$$

$$c_{AMS} = 2m_{AMS}\xi_{ótimo}\omega_{AMS} \quad (27)$$

Formulação do shear building com o controlador passivo AMS

Na Figura 4 é mostrado um desenho esquemático de uma estrutura do tipo shear building com n graus de

liberdade e ligado a um dispositivo AMS instalado no seu topo.

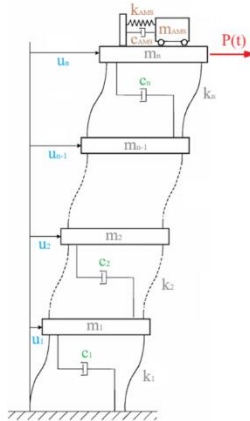


Figura 4. Modelo esquemático de estrutura de *shear building* com n andares com o controlador AMS. **Fonte:** adaptada de Khatibinia, Gholami & Kamgar (2018)²¹.

Considere um modelo de *shear building*, como o mostrado na Figura 4, mas com três andares ($n = 3$). As matrizes de massa $\hat{\mathbf{M}}$, de amortecimento $\hat{\mathbf{C}}$ e de rigidez $\hat{\mathbf{K}}$ desse sistema estrutural são montadas conforme as seguintes equações, respectivamente²¹:

$$\hat{\mathbf{M}} = \text{diag}[m_1 \ m_2 \ m_3 \ m_{AMS}] \tag{28}$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_{AMS} & -c_{AMS} \\ 0 & 0 & -c_{AMS} & c_{AMS} \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_{AMS} & -k_{AMS} \\ 0 & 0 & -k_{AMS} & k_{AMS} \end{bmatrix} \tag{30}$$

em que o símbolo $\text{diag}[\dots]$ representa uma matriz diagonal com os coeficientes diagonais mostrados entre os colchetes.

Amortecimento de Rayleigh

A matriz de amortecimento \mathbf{C} de Rayleigh é calculada segundo a expressão¹³:

$$\mathbf{C} = \mu_0 \mathbf{M} + \mu_1 \mathbf{K}, \tag{31}$$

na qual \mathbf{M} e \mathbf{K} são as matrizes de massa e de rigidez do sistema estrutural principal, respectivamente. Os coeficientes μ_0 e μ_1 são selecionados para especificar a taxa de amortecimento modal em dois modos. Atribuindo a mesma taxa de amortecimento ζ aos modos com frequências naturais ω_i e ω_j , esses coeficientes são avaliados como segue:

$$\mu_0 = \zeta \frac{2\omega_i \omega_j}{\omega_i + \omega_j} \tag{32}$$

$$\mu_1 = \zeta \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \tag{33}$$

As frequências naturais ω_i e ω_j são normalmente atribuídas como o primeiro modo e alguma frequência

de modo mais alto, respectivamente. Variações simples do amortecimento de Rayleigh são o amortecimento proporcional à rigidez ($\mathbf{C} = \mu_1 \mathbf{K}$) e o amortecimento proporcional à massa ($\mathbf{C} = \mu_0 \mathbf{M}$), que permitem que a taxa de amortecimento seja especificada em apenas um modo.

Determinação das frequências naturais e modos de vibração

As frequências naturais são propriedades inerentes ao sistema estrutural e dependem da distribuição de massa e rigidez desse sistema. Desprezando o efeito do amortecimento (isto é, $\mathbf{C} = \mathbf{0}$), a equação de movimento para o sistema estrutural principal em vibração livre ($\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0}$) é escrita conforme a equação²².

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \tag{34}$$

Uma solução possível para a Equação (34) é da forma $\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} e^{i\omega t}$, que resulta no problema clássico de autovalor e autovetor dado por²³:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\boldsymbol{\phi} e^{i\omega t} + \mathbf{M}\boldsymbol{\phi} i^2 \omega^2 e^{i\omega t} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{K}\boldsymbol{\phi} e^{i\omega t} &= -\mathbf{M}\boldsymbol{\phi} i^2 \omega^2 e^{i\omega t} \\ \mathbf{K}\boldsymbol{\phi} &= \omega^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\phi} \end{aligned} \tag{35}$$

em que $i = \sqrt{-1}$, $\boldsymbol{\phi}$ é o autovetor correspondente ao modo de vibração e ω é o autovalor que representa uma frequência natural de vibração do sistema estrutural dada em rad/s. Se a inversa da matriz \mathbf{M} existe (tal que $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{I}$) e multiplicando ambos os lados da Equação (35) por \mathbf{M}^{-1} , a mesma é reescrita da seguinte forma²²:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} &= \omega^2 \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}\boldsymbol{\phi} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} &= \omega^2 \mathbf{I}\boldsymbol{\phi} \\ \mathbf{A}\boldsymbol{\phi} &= \lambda \boldsymbol{\phi} \end{aligned} \tag{36}$$

na qual $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ e $\lambda = \omega^2$.

Há algoritmos computacionais capazes de resolver o problema dado em Equação (36) e de fornecer, de uma única vez, todas as frequências naturais e os respectivos modos de vibração. O número de modos de vibração é igual ao número de graus de liberdade do sistema estrutural.

Utilizam-se, neste trabalho, a função do Scilab $[R, \text{diagevals}] = \text{spec}(A)$, em que R é a matriz de autovetores e diagevals é a matriz que contém os autovalores²⁴, e o algoritmo do método de Jacobi na sua forma generalizada¹¹. O método de Jacobi é um dos métodos mais antigos de resolução completa do problema de autovalor e autovetor na forma reduzida com matriz real e simétrica. Na Figura 5 é apresentada a sub-rotina implementada com o programa Scilab desse método.

3. RESULTADOS

Nesta seção, são apresentadas as análises dinâmicas modal e transitiente de dois problemas de *shear building* com o dispositivo passivo de dissipação de energia AMS instalado no seu topo. As simulações numéricas são efetuadas com o programa livre Scilab¹⁸.

```

function [erro, cont, autovalor, autovetor]=jacobi(M, K, NTGL)
//Cálculo de autovalores e autovetores (Método de Jacobi)
T=eye(NTGL,NTGL);
tol=10^-12;
erro=1;
erro2=0;
cont=0;
while erro>tol
    cont=cont+1;
    for j=2:NTGL
        for i=1:j-1
            if K(i,j)<>0 || M(i,j)<>0
                a=K(i,i)*M(i,j)-K(i,j)*M(i,i);
                b=K(j,j)*M(i,j)-K(i,j)*M(j,j);
                c=(K(i,i)*M(j,j)-K(j,j)*M(i,i))/2;
                if sign(c)~=0
                    d=c+sign(c)*sqrt(c^2+a*b);
                else
                    d=c+sqrt(c^2+a*b);
                end
                gama=-a/d;
                alfa=b/d;
                for l=1:NTGL
                    aux1=K(l,i);
                    K(l,i)=aux1+K(l,j)*gama;
                    K(l,j)=K(l,j)+aux1*alfa;
                    aux2=M(l,i);
                    M(l,i)=aux2+M(l,j)*gama;
                    M(l,j)=M(l,j)+aux2*alfa;
                    aux3=T(l,i);
                    T(l,i)=aux3+T(l,j)*gama;
                    T(l,j)=T(l,j)+aux3*alfa;
                end
                K(i,i)=K(i,i)+K(j,i)*gama;
                K(j,j)=K(j,j)+K(i,j)*alfa;
                K(i,j)=0;
                M(i,i)=M(i,i)+M(j,i)*gama;
                M(j,j)=M(j,j)+M(i,j)*alfa;
                M(i,j)=0;
                for l=1:NTGL
                    K(i,l)=K(l,i);
                    K(j,l)=K(l,j);
                    M(i,l)=M(l,i);
                    M(j,l)=M(l,j);
                end
            end
        end
    end
    erro1=diag(K);
    erro=(norm(erro1)-norm(erro2))/norm(erro1);
    erro2=erro1;
end
autovalor=K*M^-1;
autovetor=T*M^(-1/2);
endfunction
    
```

Figura 5. Sub-rotina do método de Jacobi na sua forma generalizada. Fonte: Souza (2024)²².

Shear building com quatro andares

Considere o *shear building* com quatro graus de liberdade ilustrado na Figura 6 sujeito a uma carga harmônica descrita pela equação $P(t) = 66560 \text{ sen}(16t)$. Essa força corresponde a uma máquina rotativa desbalanceada localizada no primeiro andar. Esse problema foi adaptado de Breda, Rocha & Bolelli (2017)²⁵.

Os pilares têm comprimento $L = 3 \text{ m}$ e seção transversal retangular $(0,15 \times 0,5) \text{ m}^2$. Os mesmos são constituídos do material concreto armado cujo módulo de elasticidade longitudinal é $E = 21 \text{ GPa}$. A rigidez k_i de cada pavimento i é determinada como segue:

$$k_i = n_{\text{pilar}} \cdot \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3}$$

$$k_i = 2 \cdot \frac{12 \cdot 21 \cdot 10^9 \cdot 0,15 \cdot 0,5^3}{3^3 \cdot 12}$$

$$k_i = 291,67 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

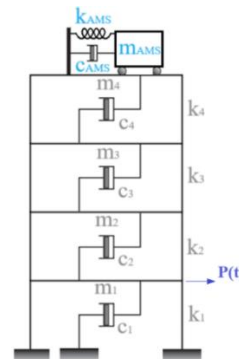


Figura 6. Modelo estrutural do *shear building* com quatro andares associado a um AMS no seu topo. Fonte: O Autor.

As matrizes de massa M e de rigidez K para a estrutura principal sem o AMS são dadas, respectivamente, por:

$$M = \text{diag}[20600 \ 20000 \ 20000 \ 20000]$$

$$K = 10^5 \begin{bmatrix} 583,33 & -291,67 & 0 & 0 \\ -291,67 & 583,33 & -291,67 & 0 \\ 0 & -291,67 & 583,33 & -291,67 \\ 0 & 0 & -291,67 & 291,67 \end{bmatrix}$$

As frequências naturais são apresentadas na Tabela 2, as quais são determinadas pela função *spec* do Scilab e pelo método de Jacobi. Nota-se a boa concordância das frequências aqui obtidas e as apresentadas por Breda, Rocha & Bolelli (2017)²⁵.

Tabela 2. As frequências naturais do *shear building* com quatro andares em rad/s.

Frequência	Função <i>spec</i>	Método de Jacobi*	Breda, Rocha & Bolelli (2017) ²⁵
1	13,252244	13,252244	13,25
2	37,996748	37,996748	38,00
3	58,136160	58,136160	58,14
4	71,583475	71,583475	71,58

*A convergência é obtida com 5 iterações e erro = 0.

Fonte: o Autor.

Para a determinação do amortecimento de Rayleigh, adota-se a taxa de amortecimento $\zeta = 0,02$, $\omega_1 = 13,252244 \text{ rad/s}$ e $\omega_2 = 37,996748 \text{ rad/s}$. A matriz de amortecimento C é representada por:

$$C = \mu_0 M + \mu_1 K$$

$$C = 0,3930163 M + 0,0007805 K$$

Com a finalidade de diminuir a amplitude máxima da estrutura durante a vibração, um AMS é instalado no último pavimento. As matrizes de massa \hat{M} , de amortecimento \hat{C} e de rigidez \hat{K} do sistema estrutural principal associado com o AMS são determinadas de acordo com as Equações (4), (5) e (6), respectivamente.

Os parâmetros ótimos obtidos desse dispositivo com a metodologia proposta por Den Hartog (1956)¹² são apresentados na Tabela 3. Considera-se a massa do AMS igual a 2,5 % da massa do último pavimento, o que

corresponde a $m_{AMS} = 500$ kg.

Nas Figuras 7 e 8 aparecem as curvas tempo *versus* deslocamento horizontal no último pavimento obtidas na análise transiente com a estrutura primária sem e com o AMS, respectivamente. As soluções numéricas são obtidas com o incremento de tempo $\Delta t = 1,0 \times 10^{-4}$ s e tempo total $t_{total} = 5$ s.

Com o método de Bathe, o deslocamento máximo no topo da estrutura sem o AMS é $u_4 = 0,0114644$ m, enquanto com o AMS é $u_4 = 0,0108307$ m. Assim, a redução na amplitude máxima é cerca de 5,528 %.

Tabela 3. Parâmetros ótimos do AMS.

ω_{est} (rad/s)	μ	ω_{AMS} (rad/s)	m_{AMS} (kg)	k_{AMS} (N/m)	C_{AMS} (Ns/m)
13,242	0,006203	13,1606	500	86601,12	632,8007

Fonte: o Autor.

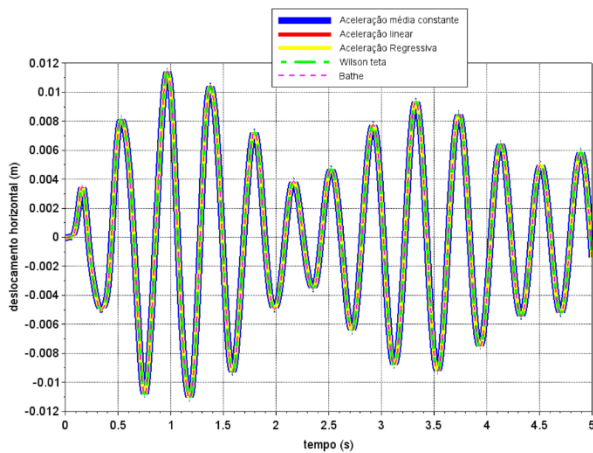


Figura 7. Curvas tempo – deslocamento para o *shear building* com quatro andares sem o AMS. Fonte: o Autor.

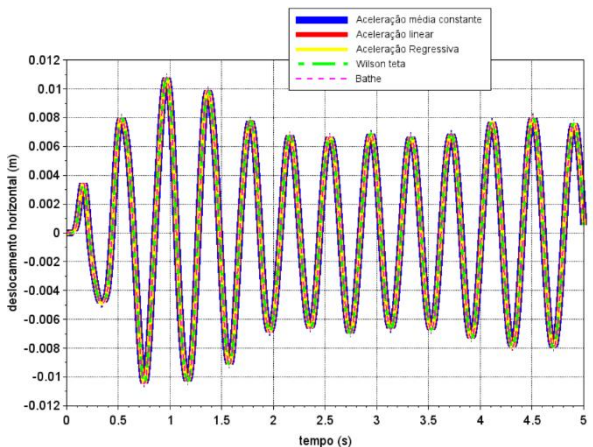


Figura 8. Curvas tempo – deslocamento para o *shear building* com quatro andares associado com AMS. Fonte: o Autor.

Shear building com 10 andares

Seja o *shear building* com 10 andares na Figura 9 sujeito a uma carga dinâmica $F(t)$ no seu topo e um sistema AMS instalado no último andar. Os pilares têm 3 m de comprimento, são constituídos por perfil W 200 x 35,9 e têm módulo de elasticidade $E = 200$ GPa. Os pavimentos têm massa 510,9 kg cada. Esse exemplo foi adaptado de Santos (2019)²⁶. A expressão que define o carregamento harmônico $F(t)$ é dada por:

$$F(t) = \begin{cases} 10000 \cos(20,018508 t), & \text{se } t \leq 0,1 \\ 0, & \text{se } t > 0,1 \end{cases} \quad (41)$$

A rigidez k_i do pavimento i é determinada por:

$$k_i = n_{\text{ pilar }} \cdot \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \quad (42)$$

$$k_i = 3 \cdot \frac{12 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 3437 \cdot 10^{-8}}{3^3}$$

$$k_i = 9,1653 \cdot 10^6 \text{ N/m.}$$

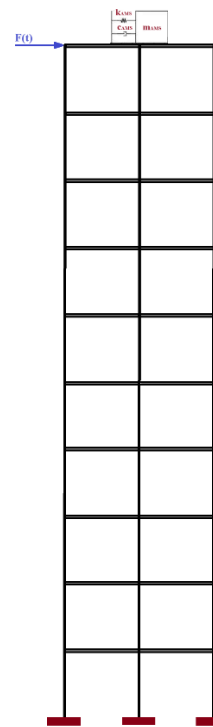


Figura 9. Modelo estrutural do *shear building* com 10 andares e o AMS instalado no seu topo. Fonte: o Autor.

As três primeiras frequências naturais (dadas em rad/s) do *shear building* são mostradas na Tabela 4. A matriz de amortecimento de Rayleigh é avaliada com a taxa de amortecimento $\zeta = 0,02$ e as frequências naturais $\omega_i = 20,018508$ rad/s e $\omega_j = 59,608343$ rad/s. A matriz de amortecimento C é representada pela seguinte combinação linear:

$$C = \mu_0 M + \mu_1 K \quad (43)$$

$$C = 0,5994310 M + 0,0005023 K$$

Tabela 4. As frequências naturais do *shear building* com 10 andares em rad/s.

Frequência	Função spec	Método de Jacobi*	Santos (2019) ²⁶
1	20,018508	20,018508	20,02
2	59,608343	59,608343	-
3	97,866626	97,866626	-

*A convergência é obtida com 6 iterações e erro = 0.

Fonte: o Autor.

Os parâmetros ótimos do dispositivo AMS estão descritos na Tabela 5. A massa do AMS é adotada 10 % da massa total do sistema estrutural principal, resultando na razão de massa $\mu = 0,10$. As curvas tempo *versus* deslocamento máximo no topo sem e com o AMS são

esboçadas na Figura 10. Essas curvas são obtidas com os métodos de Wilson- θ e de Bathe, considerando o incremento de tempo $\Delta t = 1,0 \times 10^{-3}$ s e tempo total $t_{\text{total}} = 10$ s.

Tabela 5. Parâmetros ótimos do AMS.

ω_{est} (rad/s)	μ	ω_{AMS} (rad/s)	m_{AMS} (kg)	k_{AMS} (N/m)	c_{AMS} (Ns/m)
20,0185	0,10	18,1986	510,9	169205,29	3433,3985

Fonte: o Autor.

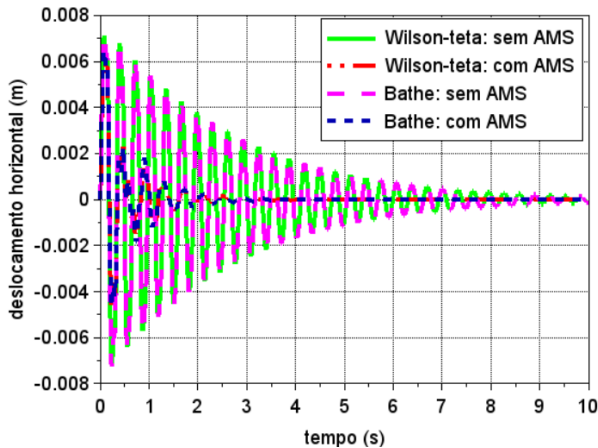


Figura 10. Curvas tempo – deslocamento no topo da estrutura com 10 andares sem e com o AMS, obtidas com os métodos de Wilson- θ e de Bathe.

Comparando as amplitudes máximas sem (0,0072628 m) e com (0,0064722 m) o dispositivo AMS, determinadas pelo método de Bathe, há uma redução na amplitude máxima de aproximadamente 10,886 %.

4. DISCUSSÃO

O AMS contém uma massa que se move em relação à estrutura principal e é fixado à mesma por uma mola e um amortecedor viscoso em paralelo. A partir dos resultados numéricos dos dois exemplos estudados, verifica-se que o sistema de controle passivo AMS reduz a amplitude máxima das estruturas submetidas à carga dinâmica. Essa redução é obtida transferindo parte da energia vibracional da estrutura principal para esse dispositivo. O mecanismo de dissipação de energia é totalmente dependente do movimento relativo da estrutura e, também, não requer qualquer energia externa para operar²⁷.

As propriedades do AMS são ajustadas às da estrutura principal. O AMS é sintonizado para a frequência do primeiro modo de vibração da estrutura principal, para que, quando ocorrer a vibração da mesma, parte da energia gerada seja absorvida pelo AMS²⁸. Nas matrizes de massa, rigidez e amortecimento da estrutura principal são inseridos os parâmetros ótimos m_{AMS} , k_{AMS} e c_{AMS} do AMS, os quais são determinados conforme o modelo de Den Hartog (1956)¹². Nesse modelo, esses parâmetros são definidos em função da razão de massa μ , que é a relação entre a massa do AMS e a massa total da estrutura principal.

As ações dinâmicas são responsáveis em grande parte pelo colapso de uma estrutura, visto que seus efeitos podem causar solicitações superiores às da

análise estrutural estática. Sendo assim, as amplitudes de vibração podem ficar acima dos valores admissíveis impostos por norma. O conhecimento da frequência natural da estrutura, bem como da frequência de excitação, é vital para evitar falhas na engenharia estrutural²⁹.

A consideração do amortecimento estrutural faz com que a amplitude de vibração da estrutura reduza com o passar do tempo, conforme é observado na Figura 10. O amortecimento é descrito pela matriz de amortecimento de Rayleigh, que é uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez do sistema estrutural. Os coeficientes de Rayleigh (μ_0 e μ_1) são avaliados em função da taxa de amortecimento ζ e das duas primeiras frequências naturais de vibração ω_i e ω_j . Observa-se que a matriz de amortecimento possui as mesmas características da matriz de rigidez, visto que ambas são matrizes tri diagonais.

A modelagem do problema de *shear building* consiste em determinar as propriedades massa, rigidez dos pilares e amortecimento. A massa é adotada como um valor fixo e considera-se que ela está toda concentrada nas lajes do pórtico. A rigidez, por sua vez, é determinada empregando a Teoria das Estruturas. Salienta-se que o modelo de *shear building* apresenta uma razoável aproximação com o funcionamento real de estruturas usuais compostas por pilares, vigas e lajes. Contudo, um modelo discretizado em um número superior de graus de liberdade, e que acarreta maior custo computacional, pode fornecer resultados ainda mais próximos à realidade¹¹.

Os métodos implementados aqui para a solução da equação do movimento dada em Equação (3) são esquemas passo a passo de integração direta no tempo. Nesses esquemas, as relações de equilíbrio são satisfeitas em tempos discretos separados pelo intervalo Δt . A solução avança no tempo assumindo variações temporais de deslocamentos, velocidades e acelerações dentro do intervalo de tempo Δt . As suposições utilizadas resultam em um algoritmo específico e afetam diretamente a estabilidade e a precisão do procedimento.

Os métodos Aceleração Média Constante, Aceleração Linear, Aceleração Regressiva e Wilson- θ são procedimentos de um único passo, enquanto o método de Bathe é um esquema composto por dois passos. Nota-se que para um problema linear, e para um determinado intervalo de tempo Δt , o custo computacional do procedimento do método de Bathe é duas vezes maior que os métodos constituídos por única etapa³⁰. De fato, no método de Bathe há a resolução de dois sistemas de equações lineares (passos 3.2 e 3.5 do algoritmo na Figura 3) e duas atualizações do vetor de forças efetivas (passos 3.1 e 3.4 do algoritmo na Figura 3). No entanto, as características de precisão e de estabilidade desse método são tais que podem ser usados intervalos de tempo maiores e o esquema é, em geral, bastante eficaz para soluções de problemas não lineares³¹.

5. CONCLUSÃO

Neste artigo, o desempenho do Amortecedor de Massa Sintonizado instalado no topo de um *shear building* sujeito à carga dinâmica foi verificado. Para esse propósito, um modelo numérico-computacional foi implementando com o programa livre Scilab e os parâmetros ótimos de massa, amortecimento e rigidez do AMS foram determinados com a aproximação de Den Hartog. As soluções numéricas dos sistemas estruturais analisados obtidas com os métodos implícitos de integração mostraram-se estáveis para os incrementos adotados de tempo.

A abordagem numérica apresentada tem como vantagens a implementação computacional relativamente simples e o baixo custo de processamento nas análises dinâmicas lineares. Em vista disso, o modelo simplificado de *shear building* pode ser útil em análises estruturais na fase de pré-projeto em razão de não exigir grandes recursos computacionais.

Visando o controle de vibrações de sistemas estruturais, pode-se alterar a massa e a rigidez de uma estrutura durante a fase de projeto, bem como a implantação de dispositivos externos na mesma, como o sistema passivo AMS. A partir dos resultados numéricos, ficou evidente que o uso desse dispositivo pode ser eficiente quando se busca reduzir os valores da amplitude de vibração de sistemas estruturais.

O desempenho mecânico e o custo dos dispositivos passivos de controle de vibração determinam a credibilidade da sua instalação em edifícios. Então, o desenvolvimento de dispositivos de dissipação de energia que sejam ao mesmo tempo viáveis economicamente e eficazes é necessário.

Por fim, as cargas móveis e o vento podem produzir vibrações nas estruturas e causar desconforto aos usuários. Via de regra, essas verificações devem ser realizadas por meio de análise dinâmica da estrutura considerando uma modelagem adequada para as ações. Nesse sentido, o Estado Limite de Serviço deve ser verificado com a finalidade de evitar a sensação de insegurança dos usuários de uma edificação na presença de deslocamentos ou vibrações excessivas.

Como sugestões de pesquisa futura envolvendo a estrutura de *shear building*, têm-se: a consideração da interação solo-estrutura na fundação; a consideração do efeito P- Δ modificando a matriz de rigidez; a análise da identificação estrutural de dano por meio da teoria da Mecânica do Dano; e a simulação e análise de outros sistemas para controle de vibração da estrutura, como os sistemas ativos, semiativos e híbridos

6. AGRADECIMENTOS

O autor agradece à Universidade Tecnológica Federal do Paraná e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PCV) da Universidade Estadual de Maringá pela viabilização desse estudo.

7. REFERÊNCIAS

- [1] Bühler AJ, Lago M, Bergamim VG, *et al.* Comparação entre simulação e sistema real de vibração com dois graus de liberdade. *Revista Brasileira de Ensino de Física.* 2019; 41: e20180296.
- [2] Brandão FDS, Miguel LFF. A New Methodology for Optimal Design of Hybrid Vibration Control Systems (MR+ TMD) for Buildings under Seismic Excitation. *Shock and Vibration.* 2023.
- [3] Palacios Quiñero F, Rubió Massegú J, Rossell JM, *et al.* Recent advances in static output-feedback controller design with applications to vibration control of large structures. *Modeling Identification and Control.* 2014; 35(3): 169-190.
- [4] Rahimi F, Aghayari R, Samali B. Application of tuned mass dampers for structural vibration control: a state-of-the-art review. *Civil Engineering Journal.* 2020;1622-1651.
- [5] Salimi M, Kamgar R, Heidarzadeh H. An evaluation of the advantages of friction TMD over conventional TMD. *Innovative Infrastructure Solutions.* 2021; 6:1-12.
- [6] Konar T, Ghosh AD. Tuned mass damper inerter for seismic control of multi-story buildings: Ten years since inception. *In Structures.* 2024; 63:106459.
- [7] Vellar LS, Ontiveros-Pérez SP, Miguel LFF, *et al.* Robust optimum design of multiple tuned mass dampers for vibration control in buildings subjected to seismic excitation. *Shock and Vibration.* 2019; 1-9.
- [8] Ganjavi B, Hajirasouliha I, Bolourchi A. Optimum lateral load distribution for seismic design of nonlinear shear-buildings considering soil-structure interaction. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering.* 2016; 88: 356-368.
- [9] Zuo Z, He Y, Li S. Rational Use of Idealized Shear-Building Models to Approximate Actual Buildings. *Buildings.* 2022; 12(3): 273.
- [10] Paz M. *Structural dynamics: theory and computation.* 4th ed. Boston: Kluwer Academic Publishers. 2003.
- [11] Soriano HL. *Introdução à dinâmica das estruturas.* 1ª ed. Rio de Janeiro: Elsevier. 2014.
- [12] Den Hartog JP. *Mechanical vibrations.* McGraw-Hill Book Company. 1956.
- [13] Ryan KL, Polanco J. Problems with Rayleigh damping in base-isolated buildings. *Journal of structural engineering.* 2008; 134(11): 1780-1784.
- [14] Constantinou MC, Soong TT, Dargush GF. *Passive energy dissipation systems for structural design and retrofit.* Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research (MCEER). 1998.
- [15] Liu T, Li Q, Zhao C. An efficient time-integration method for nonlinear dynamic analysis of solids and structures. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy.* 2013; 56: 798-804.
- [16] Wilson EL, Farhoomand I, Bathe KJ. *Nonlinear dynamic analysis of complex structures.* *Int J Earthquake Eng Struct Dyn.* 1973; 1: 241-52.
- [17] Bathe KJ. *Finite Element Procedures.* New Jersey: Prentice Hall, Pearson Education, Inc. 1996.
- [18] Scilab, versão 2024.0.0. Dassault Systèmes, 2024.
- [19] Machado WG. *Análise dinâmica de vigas mistas com interação parcial.* [dissertação] Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto. 2012.
- [20] Ospina CS. *Otimização de amortecedores de massa sintonizados, múltiplos e interligados, para controle de vibrações em edifícios altos.* [dissertação] Brasília: Universidade de Brasília. 2008

- [21] Khatibinia M, Gholami H, Kamgar R. Optimal design of tuned mass dampers subjected to continuous stationary critical excitation. *International Journal of Dynamics and Control*. 2018; 6: 1094-1104.
- [22] Souza LAF. Análise modal e transiente de shear building considerando o amortecimento de Rayleigh e o efeito do cisalhamento. *Journal of Exact Sciences – JES*. 2024; 41(1): 05-13.
- [23] Chung J, Yoo HH. Dynamic analysis of a rotating cantilever beam by using the finite element method. *Journal of Sound and vibration*. 2002; 249(1): 147-164.
- [24] Souza LAF. Análise dinâmica não linear de estruturas reticuladas por meio do elemento finito corrotacional considerando o cisalhamento e diferentes matrizes de massa. *REEC - Revista Eletrônica de Engenharia Civil*. 2023; 19: 1-20.
- [25] Breda JCO, Rocha KB, Bolelli PM. Estudo da Dinâmica em um pórtico com o auxílio do Matlab. Instituto Mauá de Tecnologia. 2017.
- [26] Santos LS. Análise da influência de diferentes configurações de instalação de amortecedores de massa sobre um pórtico de estrutura metálica submetido a cargas dinâmicas. [monografia] João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba. 2019.
- [27] Saaed TE, Nikolakopoulos G, Jonasson JE, *et al.* A state-of-the-art review of structural control systems. *Journal of Vibration and Control*. 2015; 21(5): 919-937.
- [28] Rossato LV, Miguel LF, Miguel LF. Estimativa de razão de massas ideal de amortecedor de massa sintonizada para controle de vibrações em estruturas. *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia*. 2016; 2(13): 1-12.
- [29] Varanis M, Silva AL, Mereles AG. On mechanical vibration analysis of a multi degree of freedom system based on arduino and MEMS accelerometers. *Revista Brasileira de Ensino de Física*. 2018; 40(1): e1304.
- [30] Kadapa C, Dettmer WG, Perić D. On the advantages of using the first-order generalised-alpha scheme for structural dynamic problems. *Computers & Structures*. 2017; 193: 226-238.
- [31] Bathe KJ. *Finite Element Procedures*. Watertown, MA: Prentice Hall, Pearson Education, Inc. 2016.