

ANÁLISE MODAL E TRANSIENTE DE *SHEAR BUILDING* CONSIDERANDO O AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH E O EFEITO DO CISALHAMENTO

MODAL AND TRANSIENT ANALYSIS OF SHEAR BUILDING CONSIDERING RAYLEIGH DAMPING AND EFFECT OF SHEAR

LUIZ ANTONIO FARANI DE SOUZA^{1*}

1. Engenheiro Civil, Doutor pela Universidade Federal do Paraná, Docente do Curso de Engenharia Civil da Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

* Rua Marcílio Dias, 635, Jardim Paraíso, Apucarana, Paraná, Brasil. CEP 86812-460. lasouza@utfpr.edu.br

Recebido em 01/03/2024. Aceito para publicação em 12/03/2024

RESUMO

Na análise dinâmica de estruturas de edifícios de andares múltiplos e com base rígida, as mesmas podem ser concebidas pelo modelo simplificado de *shear building*. Esse modelo considera as massas concentradas nos diversos níveis da edificação, os pisos são indeformáveis e os pilares, inextensíveis. Nesse contexto, este artigo tem por escopo apresentar um modelo numérico-computacional de *shear building* para a realização de análises dinâmicas modal e transiente. A formulação matricial considerando o efeito do cisalhamento no cálculo da rigidez dos pilares do pavimento é apresentada. A solução numérica da equação do movimento é obtida por meio de dois métodos implícitos de integração temporal direta pertencentes à família de Newmark. O amortecimento nas estruturas é aproximado pelo modelo de Rayleigh, que é uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez do sistema estrutural. Simulações numéricas com o programa livre Scilab são efetuadas de três problemas encontrados na literatura, com o fim de verificar a eficiência do código computacional desenvolvido. A partir dos resultados numéricos, conclui-se que a consideração da deformação de cisalhamento na determinação da rigidez do pilar afeta as frequências naturais e os respectivos modos de vibração da estrutura, bem como as amplitudes de vibração na análise transiente.

PALAVRAS-CHAVE: Análise dinâmica; amortecimento de Rayleigh; método de Jacobi; *shear building*; método de integração direta.

ABSTRACT

In the dynamic analysis of structures of multi-story buildings with a rigid base, they can be conceived using the simplified shear building model. This model considers the masses concentrated at different levels of the building, the floors are indeformable and the columns are inextensible. In this context, this paper aims to present a numerical-computational model of shear building for carrying out modal and transient dynamic analyzes. The matrix formulation considering the effect of shear in the calculation of the stiffness of floor columns is presented. The numerical solution of the motion equation is obtained through two implicit direct temporal integration methods belonging to the Newmark family. Damping in

structures is approximated by the Rayleigh model, which is a linear combination of the mass and stiffness matrices of the structural system. Numerical simulations with the Scilab open-source program Scilab are carried out on three problems found in the literature, to verify the efficiency of the developed computational code. From the numerical results, it is concluded that the consideration of shear strain in determining the column stiffness affects the natural frequencies and the respective vibration modes of the structure, as well as the vibration amplitudes in the transient analysis.

KEYWORDS: Dynamic analysis; Rayleigh damping; Jacobi method; shear building; direct integration method.

1. INTRODUÇÃO

Atualmente, considerando a ampla disponibilidade de ferramentas computacionais e *softwares*, é possível utilizar modelos mais complexos (por exemplo, os modelos de elementos finitos planos ou sólidos) para realizar análises dinâmicas transientes de edifícios. No entanto, se o objetivo for fornecer respostas estruturais apenas no nível do piso, o uso de modelos simplificados, como o modelo de *shear building*, é necessário e conveniente nesses casos. O *shear building* é amplamente utilizado para estudar a resposta dinâmica de edifícios de vários andares devido a sua simplicidade e baixo custo computacional¹.

A representação do *shear building* corresponde a uma estrutura idealizada na qual as vigas são infinitamente rígidas à flexão e axialmente inextensíveis, os pilares são axialmente inextensíveis e os pisos rígidos são apoiados nesses pilares. Essa suposição é muito conveniente para formular as matrizes de rigidez do piso e obter suas formas modais sem muito esforço computacional².

O rápido crescimento da urbanização resultou num aumento histórico no número de estruturas e edifícios altos. A vibração excessiva nesses edifícios é induzida por forças externas, como terremoto e vento. A vibração induzida pode levar a danos estruturais e desempenho insatisfatório das estruturas³.

A resposta predita por um modelo computacional dinâmico de uma estrutura da engenharia civil é sensível ao amortecimento assumido no mesmo⁴. A matriz de amortecimento clássica que é amplamente implementada em programas comerciais de análise estrutural dinâmica é atribuída ao conceito do amortecimento de *Rayleigh*. Essa matriz é expressa como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez da estrutura⁵.

Em análises dinâmicas da engenharia estrutural, métodos de solução mais gerais para realizar tais análises são do tipo integração direta passo a passo no tempo, em que as equações de equilíbrio são solucionadas nos tempos discretos $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$. Nessa categoria, Newmark (1959)⁶, Houbolt (1950)⁷ e Wilson *et al.* (1972)⁸ são exemplos de métodos implícitos mais comuns. A estabilidade e precisão dos métodos de solução são essenciais na análise prática. Portanto, é muito importante usar técnicas precisas e numericamente eficientes em programas de computador⁹.

Na análise dinâmica de edifícios de múltiplos andares e com base rígida, essas estruturas podem ser concebidas pelo modelo simplificado de *shear building*, em que os graus de liberdade são os deslocamentos horizontais das lajes¹⁰. Nesse contexto, este artigo tem por escopo apresentar um modelo numérico-computacional do *shear building* para a realização de análises dinâmicas modal e transiente.

Na formulação matricial desse modelo, a rigidez dos pilares é determinada considerando o efeito da deformação por cisalhamento, o qual é descrito pelo fator de correção de rigidez¹¹. Esse fator depende do coeficiente de Poisson e da relação entre as dimensões da seção transversal¹².

A solução da equação do movimento é obtida por meio de dois métodos implícitos de integração temporal direta pertencentes à família de Newmark, que são os métodos Aceleração Média Constante e Aceleração Linear. As formulações desses métodos dependem de dois parâmetros (β e γ) cujos valores determinam a eficiência e estabilidade do algoritmo.

Com relação à construção da matriz de amortecimento, utiliza-se o modelo de Rayleigh. Essa matriz é obtida em função da taxa de amortecimento e de duas frequências naturais distintas da estrutura. Além da simplicidade, a grande vantagem do amortecimento de Rayleigh é fornecer a matriz de amortecimento global com as mesmas características de esparsidade que a matriz de rigidez¹³.

Um programa de computador é desenvolvido com o *software* livre Scilab¹⁴. Simulações numéricas de três problemas de *shear building* são realizadas com o propósito de validar o algoritmo. A metodologia proposta pode ser facilmente implementada e os resultados numéricos obtidos tiveram boa precisão e ficaram em acordo com os disponíveis na literatura.

Na análise modal, as frequências naturais e os modos de vibração correspondentes dos sistemas estruturais são determinados pela função *spec* do Scilab e pelo método

de Jacobi na forma generalizada¹³.

2. MATERIAL E MÉTODOS

Formulação matricial do *shear building*

O *shear building* é um modelo de elementos discretos utilizados para representar edifícios¹⁵. Esse modelo é uma simplificação que assume que toda a massa do edifício está concentrada nos níveis dos pisos. As vigas do piso têm rigidez infinita e o efeito axial dos pilares não é considerado. Essas suposições permitem assumir que os deslocamentos em cada piso podem ser descritos por um único grau de liberdade translacional¹⁶.

Considere um edifício com n pavimentos, conforme apresentado na Figura 1, com n massas concentradas no nível dos pavimentos e conectadas por barras que apresentam rigidez e amortecimento dos pilares daquele pavimento¹⁷.

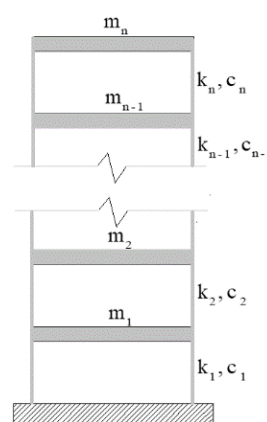


Figura 1. Modelo estrutural do *shear building* com n andares. Fonte: adaptada de Yanik & Ulus (2023)¹⁷.

As matrizes de massa \mathbf{M} , amortecimento \mathbf{C} e rigidez \mathbf{K} da estrutura do tipo *shear building* são dadas, respectivamente, por¹⁷:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & m_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \dots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \dots & 0 \\ 0 & -c_3 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & c_{n-1} + c_n & -c_n \\ 0 & 0 & 0 & -c_n & c_n \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & 0 \\ 0 & -k_3 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & -k_n & k_n \end{bmatrix}, \quad (3)$$

sendo k_i a rigidez, m_i a massa e c_i o amortecimento do andar i , com $i = 1, \dots, n$. Os pilares são considerados engastados entre os pavimentos. Dessa forma, o coeficiente $k_{\text{ pilar}}$ de cada pilar é avaliado pela

expressão¹⁶:

$$k_{\text{pilar}} = \frac{12EI}{L^3}, \tag{4}$$

na qual E é o módulo de elasticidade longitudinal, I é o momento de inércia e L é o comprimento do pilar.

Uma correção no cálculo da rigidez dos pilares pode ser feita introduzindo no denominador da Equação (4) o fator (1 + φ). Essa correção é mais expressiva para pilares de grandes dimensões em que o esforço cisalhamento se torna importante¹¹. Assim, a Equação (4) é reescrita por:

$$k_{\text{pilar}} = \frac{12EI}{(1 + \Phi)L^3}, \tag{5}$$

sendo φ o fator de correção da rigidez dado por:

$$\Phi = \frac{12EI}{GA_s L^2}, \tag{6}$$

na qual G é o módulo de cisalhamento transversal e A_s = κ b h é a área de cisalhamento da seção transversal retangular com largura b e altura h e κ é o coeficiente de cisalhamento. Uma fórmula para o cálculo desse coeficiente para seções retangulares é¹²:

$$\kappa = \frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu}. \tag{7}$$

O parâmetro k_i na matriz em Equação (3) representa a rigidez de cada andar e é determinado pela equação:

$$k_i = n_{\text{pilar}} k_{\text{pilar}} \tag{8}$$

em que n_{pilar} é o número de pilares do pavimento. A massa de cada andar m_i é obtida por meio da soma das massas dos pilares, das vigas e das lajes existentes naquele andar conforme a equação:

$$m_i = m_{\text{pilares}} + m_{\text{vigas}} + m_{\text{lajes}}. \tag{9}$$

Amortecimento de Rayleigh

O amortecimento de Rayleigh pode ser aplicado a uma estrutura convencional por meio da matriz de amortecimento C, a qual é expressa matematicamente por⁴:

$$C = \mu_0 M + \mu_1 K, \tag{10}$$

em que M e K são as matrizes de massa e de rigidez da estrutura, respectivamente. Os coeficientes μ₀ e μ₁ são selecionados para especificar a razão de amortecimento modal em dois modos. Atribuindo a mesma taxa de amortecimento ζ aos modos com frequências ω_i e ω_j, os coeficientes μ₀ e μ₁ são computados por, respectivamente:

$$\mu_0 = 2\zeta \frac{\omega_i \omega_j}{\omega_i + \omega_j}, \tag{11}$$

$$\mu_1 = \zeta \frac{2}{\omega_i + \omega_j}. \tag{12}$$

As frequências ω_i e ω_j são normalmente atribuídas como o primeiro modo e alguma frequência de modo mais alto, respectivamente, de modo que o amortecimento seja limitado na faixa de frequência que inclui a maior parte da participação modal.

Variações simples do amortecimento Rayleigh são o amortecimento proporcional à rigidez (com μ₀ = 0 e μ₁

≠ 0) e o amortecimento proporcional à massa (com μ₀ ≠ 0 e μ₁ = 0), o que possibilita que a taxa de amortecimento seja especificada em apenas um modo.

Equação do movimento e métodos de solução

A equação diferencial ordinária de segunda ordem que governa a resposta dinâmica de um sistema estrutural em termos dos deslocamentos nodais é dada por¹⁸:

$$K u + C \dot{u} + M \ddot{u} - F_{\text{ext}} = 0, \tag{13}$$

sendo u o vetor de deslocamento horizontal, \dot{u} o vetor de velocidade, \ddot{u} o vetor de aceleração e F_{ext} o vetor de forças externas aplicadas em função do tempo t.

A solução aproximada do sistema dado em Equação (13), cujas incógnitas são u(t), $\dot{u}(t)$ e $\ddot{u}(t)$, é obtida por um esquema de integração numérica. O método implícito amplamente utilizado para dinâmica estrutural é o método de Newmark. Para iniciar esse método, o vetor \ddot{u} em t = 0 deve ser calculado por¹⁹:

$$\ddot{u}(0) = M^{-1} [F_{\text{ext}}(0) - C \dot{u}(0) - K(u(0))]. \tag{14}$$

Para o instante de tempo atual (t + Δt), as expressões de Newmark para o deslocamento u e a velocidade \dot{u} são dadas por, respectivamente:

$${}^{t+\Delta t}u = {}^t u + \Delta t \ {}^t \dot{u} + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) {}^t \ddot{u} + \beta \ {}^{t+\Delta t} \ddot{u} \right], \tag{15}$$

$${}^{t+\Delta t} \dot{u} = {}^t \dot{u} + \Delta t (1 - \gamma) \ {}^t \ddot{u} + \Delta t \gamma \ {}^{t+\Delta t} \ddot{u}, \tag{16}$$

em que β e γ são constantes referentes ao método de Newmark e Δt é o intervalo de tempo. Na família de Newmark há diversas particularizações no que tange aos valores dessas constantes²⁰. Na Tabela 1 são descritos dois métodos dessa família e na Figura 2 é apresentado o pseudoalgoritmo dos mesmos, os quais diferem entre si pelos valores adotados para as constantes β e γ.

Tabela 1. Métodos implícitos da família de Newmark.

Método	β	γ	Ordem de precisão
Aceleração Média Constante (AMC)	1/4	1/2	2
Aceleração Linear (AL)	1/6	1/2	2

Fonte: Bathe (2016)²⁰.

Determinação das frequências naturais e modos de vibração correspondentes

As frequências naturais são propriedades inerentes ao sistema estrutural e dependem da distribuição de massa e rigidez desse sistema. Desprezando o efeito do amortecimento (C = 0), a equação de movimento do sistema estrutural em vibração livre (F_{ext} = 0) é escrita conforme a Equação (17)²¹.

$$K u + M \ddot{u} = 0. \tag{17}$$

Uma solução possível para a Equação (17) é da forma u = φ sen(ωt), que resulta no problema clássico de autovalor e autovetor dado pela seguinte expressão:

$$K \phi \text{sen}(\omega t) - M \phi \omega^2 \text{sen}(\omega t) = 0, \tag{18}$$

em que ϕ é o autovetor correspondente ao modo de vibração e ω é o autovalor que representa uma frequência natural de vibração do sistema estrutural dada em rad/s. Se a inversa da matriz \mathbf{M} existe (tal que $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{I}$) e multiplicando ambos os lados da Equação (18) por \mathbf{M}^{-1} , a mesma é reescrita da seguinte forma:

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\phi \text{sen}(\omega t) - \mathbf{I} \phi \omega^2 \text{sen}(\omega t) = \mathbf{0}, \quad (19)$$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\phi = \phi \omega^2, \quad (20)$$

$$\mathbf{A}\phi = \lambda\phi, \quad (21)$$

na qual $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ e $\lambda = \omega^2$.

Casos especiais:
 - Método de Aceleração Média Constante: $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$
 - Método de Aceleração Linear: $\beta = 1/6$ e $\gamma = 1/2$

1. Cálculos iniciais
 1.1 $\ddot{\mathbf{u}}^{(0)} \leftarrow \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{\text{ext}}^{(0)} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^{(0)} - \mathbf{K}\mathbf{u}^{(0)})$
 1.2 Selecionar Δt
 1.3 $\mathbf{a}_1 \leftarrow \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{\beta\Delta t}\mathbf{C}$ $\mathbf{a}_2 \leftarrow \frac{1}{\beta\Delta t}\mathbf{M} + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\mathbf{C}$
 $\mathbf{a}_3 \leftarrow \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\mathbf{M} + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\mathbf{C}$
 1.4 $\tilde{\mathbf{K}} \leftarrow \mathbf{K} + \mathbf{a}_1$
 2. Cálculos para cada passo de tempo, com $i = 0, 1, 2, \dots$
 2.1 $\hat{\mathbf{F}}_{\text{ext}}^{(i+1)} \leftarrow \mathbf{F}_{\text{ext}}^{(i+1)} + \mathbf{a}_1\mathbf{u}^{(i)} + \mathbf{a}_2\dot{\mathbf{u}}^{(i)} + \mathbf{a}_3\ddot{\mathbf{u}}^{(i)}$
 2.2 $\mathbf{u}^{(i+1)} \leftarrow \tilde{\mathbf{K}}^{-1}\hat{\mathbf{F}}_{\text{ext}}^{(i+1)}$
 2.3 $\dot{\mathbf{u}}^{(i+1)} \leftarrow \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\mathbf{u}^{(i+1)} - \mathbf{u}^{(i)}) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{\mathbf{u}}^{(i)} + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{\mathbf{u}}^{(i)}$
 2.4 $\ddot{\mathbf{u}}^{(i+1)} \leftarrow \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\mathbf{u}^{(i+1)} - \mathbf{u}^{(i)}) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}^{(i)} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{u}}^{(i)}$
 3. Repetir para o próximo passo de tempo. Relocar i por $i+1$ e implementar passos 2.1 a 2.4 para o próximo passo de tempo.

Figura 2. Pseudoalgoritmo de Newmark. Fonte: adaptada de Bathe (2016)²⁰.

Na literatura, há algoritmos computacionais capazes de resolver o problema dado em Equação (21) e de fornecer, de uma só vez, todas as frequências naturais e os respectivos modos de vibração. O número de modos de vibração é igual ao número de graus de liberdade do sistema estrutural.

Neste trabalho, utilizam-se a função do Scilab [*R*, *diagevals*] = *spec*(*A*), em que *R* é a matriz de autovetores e *diagevals* é a matriz que contém os autovalores, e o algoritmo do método de Jacobi na sua forma generalizada¹³.

O método de Jacobi é um dos métodos mais antigos de resolução completa do problema de autovalor e autovetor na forma reduzida com matriz real e simétrica¹³. Na Figura 3 é apresentada a sub-rotina implementada com o programa Scilab desse método.

3. RESULTADOS

Nesta seção, são apresentados os resultados numéricos obtidos com o código computacional desenvolvido com o programa Scilab¹⁴, versão 2024.0.0, para as análises modal e transiente de estruturas do tipo *shear building* encontradas na literatura. Salienta-se que as unidades de medida dos problemas foram mantidas conforme as referências bibliográficas originais.

Exemplo numérico 1

Considere o modelo estrutural adimensional do *shear building* com dois andares e sujeito a uma força dinâmica senoidal $F(t) = p_0 \text{sen}(w_0 t)$, conforme é ilustrado na Figura 4. Essa estrutura foi estudada por Vaz

(2011)²².

Nessa representação, m_i é a massa, c_i é o coeficiente de amortecimento e k_i é o coeficiente de rigidez de flexão, correspondentes ao pavimento i . Os pilares têm módulo de elasticidade longitudinal $E = 2,0 \times 10^8$ e seção transversal quadrada com lados iguais a 0,2.

```
function [erro, cont, autovalor, autovetor]=jacobi(M, K, NTGL)
//Cálculo de autovalores e autovetores (Método de Jacobi)
T=eye(NTGL,NTGL);
tol=10^-12;
erro=1;
erro2=0;
cont=0;
while erro>tol
    cont=cont+1;
    for j=2:NTGL
        for i=1:j-1
            if K(i,j)<0 || M(i,j)<0
                a=K(i,i)*M(i,j)-K(j,j)*M(i,i);
                b=K(j,j)*M(i,j)-K(i,i)*M(j,j);
                c=(K(i,i)*M(j,j)-K(j,j)*M(i,i))/2;
                if sign(c)~=0
                    d=c+sign(c)*sqrt(c^2+a*b);
                else
                    d=c+sqrt(c^2+a*b);
                end
                gama=-a/d;
                alfa=b/d;
                for l=1:NTGL
                    aux1=K(l,i);
                    K(l,i)=aux1+K(l,j)*gama;
                    K(l,j)=K(l,j)+aux1*alfa;
                    aux2=M(l,i);
                    M(l,i)=aux2+M(l,j)*gama;
                    M(l,j)=M(l,j)+aux2*alfa;
                    aux3=T(l,i);
                    T(l,i)=aux3+T(l,j)*gama;
                    T(l,j)=T(l,j)+aux3*alfa;
                end
                K(i,i)=K(i,i)+K(j,i)*gama;
                K(j,j)=K(j,j)+K(i,j)*alfa;
                K(i,j)=0;
                M(i,i)=M(i,i)+M(j,i)*gama;
                M(j,j)=M(j,j)+M(i,j)*alfa;
                M(i,j)=0;
                for l=1:NTGL
                    K(i,l)=K(l,i);
                    K(j,l)=K(l,j);
                    M(i,l)=M(l,i);
                    M(j,l)=M(l,j);
                end
            end
        end
    end
    erro1=diag(K);
    erro=(norm(erro1)-norm(erro2))/norm(erro1);
    erro2=erro1;
end
autovalor=K*M^-1;
autovetor=T*M^(-1/2);
endfunction
```

Figura 3. Sub-rotina do método de Jacobi na sua forma generalizada. Fonte: o Autor.

A amplitude da força de excitação p_0 é igual a 2,0 e a frequência de força de excitação w_0 é igual a 0,5. As massas totais dos pavimentos são $m_1 = 1000$ e $m_2 = 800$.

Os valores dos coeficientes de rigidez dos pilares de cada pavimento são:

$$k_1 = k_2 = 4 \times 10^4. \quad (21)$$

As matrizes de rigidez e de massa são dadas por, respectivamente:

$$K = 10^4 \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 800 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

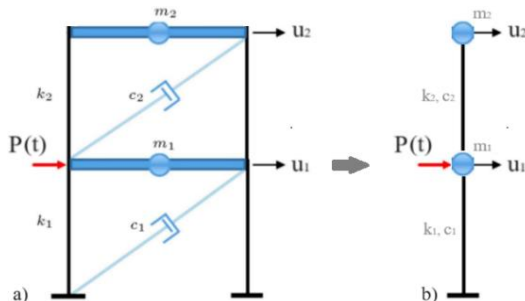


Figura 4. Shear building com dois andares - a) modelo estrutural; e b) modelo equivalente. Fonte: o Autor.

A análise modal consiste em determinar as frequências naturais e os modos de vibração da estrutura. As frequências naturais determinadas pela função *spec* e pelo método de Jacobi (sub-rotina da Figura 3) são mostradas na Tabela 2, havendo boa concordância com os resultados obtidos por Vaz (2011)²².

Tabela 2. Frequências naturais do shear building com dois andares.

Vaz (2011) ²²	Função <i>spec</i>	Método de Jacobi
4,223	4,222569	4,222569
10,591	10,591029	10,591029

Fonte: o Autor.

A solução com o método de Jacobi é obtida com duas iterações e erro = 0. Os modos de vibração (autovetores) são:

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} 0,02567 \\ -0,02064 \end{bmatrix} \text{ e } \phi_2 = \begin{bmatrix} 0,01846 \\ 0,02870 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Para obter os autovetores unitários, divide-se o vetor ϕ_i pelo seu módulo $\|\phi_i\|$. Assim, os autovetores unitários são:

$$\phi'_1 = \begin{bmatrix} 0,77925 \\ -0,62671 \end{bmatrix} \text{ e } \phi'_2 = \begin{bmatrix} 0,54107 \\ 0,84097 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Os desenhos esquemáticos dos modos de vibração do modelo equivalente do shear building com dois andares obtidos com os autovetores unitários (Equação (25)) aparecem na Figura 5.

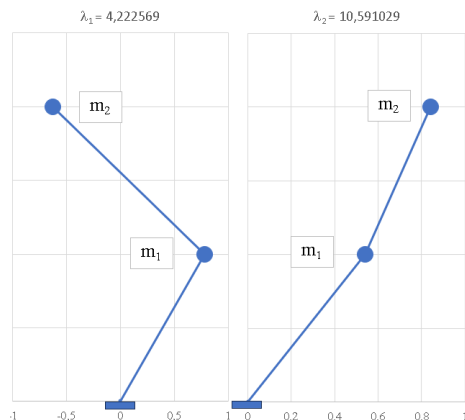


Figura 5. Shear building com dois andares: modos de vibração. Fonte: o Autor.

Os vetores apresentados na Equação (25) estão de acordo com os determinados pela função *spec*. Para o cálculo da matriz de amortecimento de Rayleigh, adota-se a razão de amortecimento $\zeta = 0,1$. A matriz de amortecimento **C** é dada por:

$$C = \begin{bmatrix} 1683,876 & -540,044 \\ -540,044 & 1023,074 \end{bmatrix}, \tag{26}$$

sendo as constantes $\mu_0 = 0,6037879$ e $\mu_1 = 0,0135011$. As matrizes **K**, **M** e **C** são simétricas e definidas positivas.

No que diz respeito à análise transiente, a mesma objetiva avaliar a resposta de uma estrutura submetida à ação de um carregamento qualquer variável ao longo do tempo. O gráfico da força transiente é mostrado na Figura 6, considerando tempo máximo $t_{m\acute{a}x} = 5$.

As curvas tempo *versus* deslocamento u_1 para a estrutura sem e com amortecimento, para um incremento de tempo $\Delta t = 1,0 \times 10^{-4}$, são apresentadas na Figura 7. Nota-se, na Figura 7, a boa concordância das respostas obtidas entre os métodos de integração Aceleração Média Constante (AMC) e Aceleração Linear (AL).

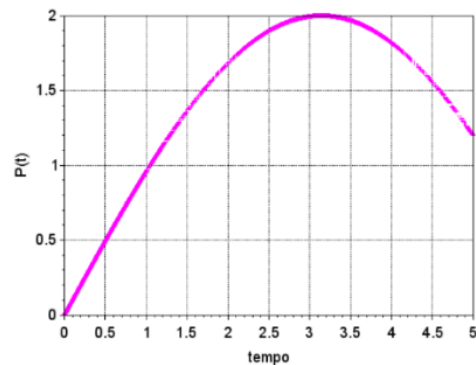


Figura 6. Curva tempo *versus* força transiente P(t). Fonte: o Autor.

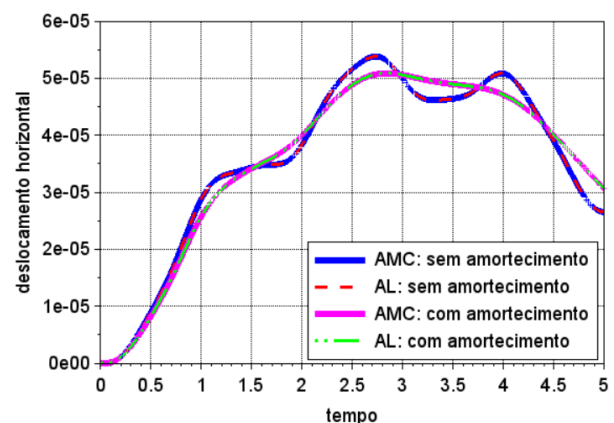


Figura 7. Shear building com dois andares – curvas tempo *versus* deslocamento sem e com amortecimento. Fonte: o Autor.

Exemplo numérico 2

Um modelo de shear building com quatro andares é analisado aqui, em que o modelo estrutural e o carregamento dinâmico estão representados na Figura 8. Esse problema foi estudado por Soares Jr (2011)²³. Os

valores de massa e rigidez são adotados iguais para todos os andares, que são $m = 5 \times 10^4 \text{ kg}$ e $k = 2,5 \times 10^7 \text{ N/m}$, respectivamente. Uma força dinâmica, cuja dependência do tempo é mostrada na Figura 8b, é aplicada no quarto andar do modelo estrutural.

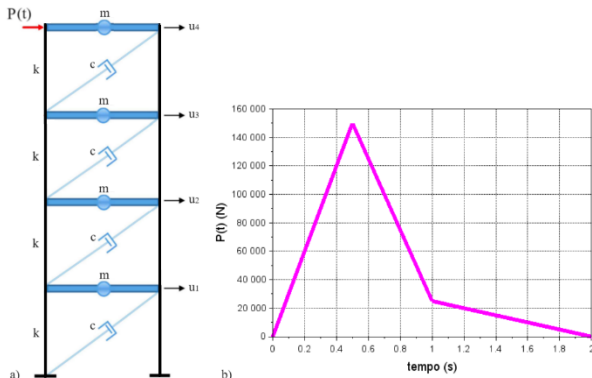


Figura 8. Shear building com quatro andares – a) modelo estrutural; e b) carga dinâmica. Fonte: o Autor.

As matrizes \mathbf{K} e \mathbf{M} do shear building com quatro andares são, respectivamente:

$$\mathbf{K} = 10^6 \begin{bmatrix} 50 & -25 & 0 & 0 \\ -25 & 50 & -25 & 0 \\ 0 & -25 & 50 & -25 \\ 0 & 0 & -25 & 25 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$\mathbf{M} = 50000 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

As frequências naturais (em rad/s) determinadas com a função *spec* e o método de Jacobi são apresentadas na Tabela 3. A solução com o método de Jacobi é obtida com cinco iterações e erro = 0.

Tabela 3. Frequências naturais do shear building com quatro andares.

Função <i>spec</i>	Método de Jacobi
7,7657826	7,7657826
22,360680	22,360680
34,258549	34,258549
42,024332	42,024332

Fonte: o Autor.

As curvas tempo versus deslocamento horizontal no topo da estrutura sem e com amortecimento, para um incremento de tempo $\Delta t = 1,0 \times 10^{-4} \text{ s}$ e tempo máximo $t_{\text{máx}} = 5 \text{ s}$, são esboçadas na Figura 9. Nota-se a boa concordância entre os resultados aqui obtidos e os de Soares Jr (2011)²³.

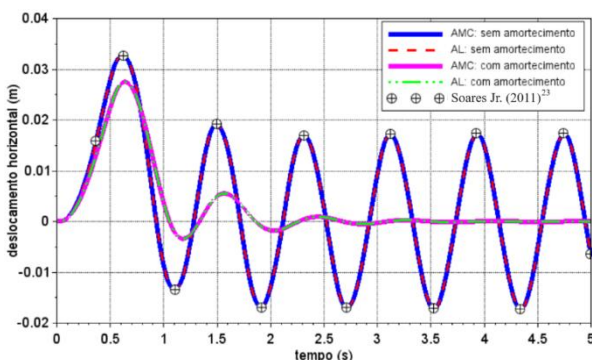


Figura 9. Shear building com quatro andares – curvas tempo versus deslocamento sem e com amortecimento. Fonte: o Autor.

Para o cálculo da matriz de amortecimento de Rayleigh, supõe-se a razão de amortecimento $\zeta = 0,2$. A matriz de amortecimento \mathbf{C} é determinada com as constantes $\mu_0 = 2,3055900$ e $\mu_1 = 0,0132774$.

Exemplo numérico 3

Seja o shear building na Figura 10 que é a idealização de um edifício de três andares. Supõe-se que o mesmo esteja submetido a uma força dinâmica no seu topo $P(t) = 4 \times 10^7 \text{ sen}(19 t)$. Essa estrutura foi analisada por Ribeiro (2017)²⁴. Considera-se que a rigidez à rotação das lajes de piso é infinita e, portanto, os graus de liberdade devido à rotação de cada nó podem ser desprezados, resultando apenas em três graus de liberdade.

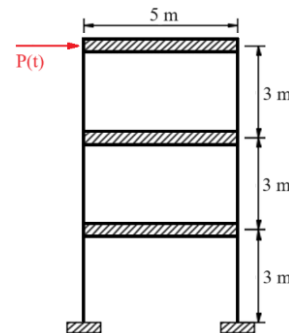


Figura 10. Modelo estrutural do shear building com três andares. Fonte: adaptada de Ribeiro (2017)²⁴.

Os pilares são feitos de concreto armado ($\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$) e com seções retangulares cujas dimensões são $b = 20 \text{ cm}$ e $h = 60 \text{ cm}$. Os pisos são lajes de concreto com 15 cm de espessura e 6 m de largura. O concreto utilizado possui a resistência característica à compressão $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$. Os parâmetros para a determinação da rigidez de cada piso são: $E = 30 \text{ GPa}$; $I = 3,6 \times 10^{-3} \text{ m}^4$; $\nu = 0,2$; e $G = 12,5 \text{ GPa}$.

As matrizes de rigidez do sistema estrutural \mathbf{K} sem e com a correção da rigidez de pilares (consideração da deformação por cisalhamento) são dadas por, respectivamente:

$$\mathbf{K} = 10^8 \begin{bmatrix} 1,92 & -0,96 & 0 \\ -0,96 & 1,92 & -0,96 \\ 0 & -0,96 & 0,96 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

$$\mathbf{K} = 10^8 \begin{bmatrix} 1,7241 & -0,8620 & 0 \\ -0,8620 & 1,7241 & -0,8620 \\ 0 & -0,8620 & 0,8620 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

A matriz de massa \mathbf{M} da estrutura é dada por:

$$\mathbf{M} = 10^4 \begin{bmatrix} 1,305 & 0 & 0 \\ 0 & 1,305 & 0 \\ 0 & 0 & 1,215 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

As frequências naturais (em rad/s) determinadas com o método de Jacobi e com a função *spec* do Scilab, considerando ambos os modelos (sem e com o efeito do cisalhamento), aparecem na Tabela 4. As frequências com o método de Jacobi são obtidas com quatro iterações e erro = 0. Para o caso sem o cisalhamento, nota-se a razoável concordância entre as frequências obtidas com o método de Jacobi e a função *spec* e as

apresentadas por Ribeiro (2017)²⁴.

Tabela 4. Frequências naturais do *shear building* com três andares.

Sem cisalhamento			Com cisalhamento	
Ribeiro (2017) ²⁴	Função <i>spec</i>	Método de Jacobi	Função <i>spec</i>	Método de Jacobi
38,904	38,90327	38,90327	36,86561	36,86561
108,291	108,31351	108,31351	102,64032	102,64032
155,215	155,18132	155,18132	147,05332	147,05332

Fonte: o Autor.

A matriz de amortecimento de Rayleigh **C** é calculada com a razão de amortecimento $\zeta = 0,1$. Como essa matriz depende da matriz de rigidez **K**, duas matrizes de amortecimento sem e com o efeito do cisalhamento são obtidas, respectivamente:

$$\mathbf{C} = 10^5 \begin{bmatrix} 3,3554 & -1,3042 & 0 \\ -1,3042 & 3,3554 & -1,3042 \\ 0 & -1,3042 & 1,9997 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$\mathbf{C} = 10^5 \begin{bmatrix} 3,1797 & -1,2358 & 0 \\ -1,2358 & 3,1797 & -1,2358 \\ 0 & -1,2358 & 1,8949 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

As curvas tempo *versus* deslocamento no topo da estrutura sem e com o efeito do cisalhamento, para um incremento de tempo $\Delta t = 1,0 \times 10^{-3}$ s e tempo máximo $t_{\text{máx}} = 2$ s, são mostradas na Figura 11.

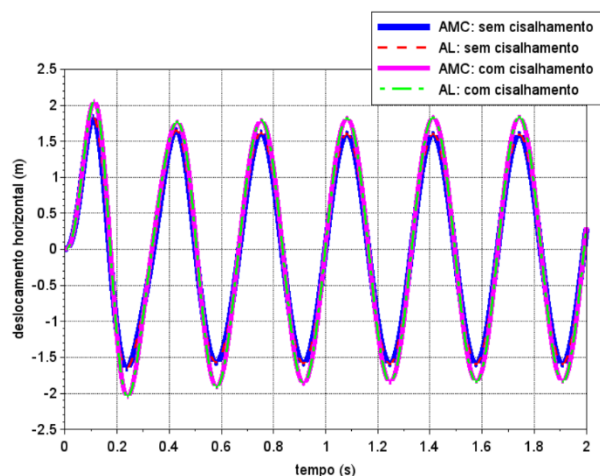


Figura 11. *Shear building* com três andares: curvas tempo – deslocamento horizontal para os modelos sem e com o efeito do cisalhamento. Fonte: o Autor.

4. DISCUSSÃO

Nos exemplos numéricos, a matriz de amortecimento **C** é obtida pela combinação linear das matrizes de massa **M** e de rigidez **K** da estrutura, aplicando os coeficientes de proporcionalidade de Rayleigh, μ_0 e μ_1 , obtidos com base nas frequências naturais (primeiro e segundo modos de vibração) e com a taxa de amortecimento ζ a qual é designada diretamente pelo usuário.

A energia vibracional de sistemas estruturais é dissipada por vários mecanismos, por exemplo, os efeitos térmicos causados pela repetição de ciclos de tensão e pelo atrito interno de um elemento deformado. Nesses sistemas, os mecanismos dissipativos dependem dos materiais e de suas interações²⁵. A determinação dos coeficientes da matriz de amortecimento de forma direta

é de grande dificuldade, uma vez que depende das dimensões da estrutura e de seus membros e das propriedades de amortecimento dos materiais estruturais utilizados^{26,27}.

O amortecimento estrutural é uma medida de dissipação de energia que conduz a estrutura de um estado vibratório para um estado em repouso. Esse comportamento é evidenciado na Figura 9, pois a estrutura estando em vibração livre após 2 s tende para o repouso ao longo do tempo.

Com relação ao terceiro exemplo numérico, nota-se que o modelo sem a correção da rigidez dos pilares devida à deformação de cisalhamento fornece valores de frequência mais elevados (Tabela 4) do que os obtidos pelo modelo que considera tal correção.

O fenômeno de ressonância é encontrado em um grande número de aplicações estruturais nas quais há vibração. Esse fenômeno ocorre quando a frequência de excitação é igual à frequência natural do sistema mecânico, o que pode causar danos no mesmo. Sendo assim, o conhecimento das frequências naturais da estrutura, bem como das frequências de excitação, é vital para evitar falhas em estruturas de engenharia²⁸.

De acordo com Han *et al.* (1999)²⁹, o modelo de viga de Euler-Bernoulli tende a superestimar ligeiramente as frequências naturais em comparação com o modelo baseado na teoria de viga de Timoshenko. Esse problema é agravado para as frequências naturais dos modos mais elevados. Além disso, as diferenças entre as teorias diminuem monotonamente com o aumento do índice de esbeltez, que é definido pela razão entre o comprimento do elemento estrutural e o raio de giração da seção transversal.

Um parâmetro fundamental na teoria de viga de Timoshenko é o fator de forma, também chamado de coeficiente de cisalhamento ou fator de redução de área. Esse parâmetro surge porque o cisalhamento não é constante ao longo da seção transversal¹². Na correção da rigidez dos pilares do *shear building* no terceiro exemplo, considera-se o coeficiente de cisalhamento $\kappa = 0,8450704$, o qual é determinado conforme a Equação (7).

A Figura 11 mostra que os deslocamentos horizontais preditos pelos modelos sem e com o efeito do cisalhamento são semelhantes para os primeiros passos de tempo t , dado que há proximidade das curvas tempo – deslocamento. No entanto, com o decorrer do tempo, divergências nos traçados delas ficam mais aparentes, em que amplitudes de vibração maiores são obtidas para o modelo com o efeito do cisalhamento.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho, um modelo numérico-computacional para a análise dinâmica linear de estruturas do tipo *shear building* foi descrito. Esse modelo estrutural apresenta uma razoável aproximação quanto ao funcionamento real de estruturas usuais constituídas por pilares, vigas e lajes. Além disso, o mesmo tem como vantagens a implementação computacional relativamente simples e o baixo custo de processamento nas análises numéricas.

Nesse sentido, acredita-se que esse modelo simplificado pode ser útil em análises estruturais na fase de pré-projeto devido a não exigir grandes recursos computacionais.

Os resultados numéricos de problemas dinâmicos com *shear building* obtidos mostrou a eficiência do código computacional implementado com o programa Scilab, visto que ficaram de acordo com àqueles disponíveis na literatura. As soluções numéricas com os métodos implícitos de integração direta mostraram-se estáveis para os intervalos de tempo dos sistemas estruturais analisados.

Destaca-se a importância de análises dinâmicas transientes e modais em edifícios com múltiplos andares, porque deslocamentos excessivos causam problemas em elementos estruturais e não estruturais. Com relação a esse último, tais deslocamentos podem ocasionar, por exemplo, o surgimento de trincas em paredes de alvenaria e problemas em esquadrias. Isso posto, não se pode negligenciar a análise dinâmica de edifícios altos e flexíveis, pois a análise meramente estática vai de encontro à segurança da estrutura e à garantia do conforto de seus usuários.

Por fim, para que os critérios estabelecidos em normas técnicas em vigor sejam atendidos no dimensionamento de estruturas sujeitas à vibração, deve-se realizar uma análise dinâmica a qual consiste na manipulação das propriedades dinâmicas dos sistemas estruturais, tais como a massa, a rigidez e o amortecimento estrutural.

Como pesquisa futura, os seguintes temas envolvendo *shear building* são sugeridos: estudo de vibrações com sistemas de controle passivo, como amortecedor de massa sintonizado; a consideração da interação solo-estrutura na fundação; a consideração do efeito P- Δ modificando a matriz de rigidez; e a análise da identificação estrutural de dano por meio da teoria da Mecânica do Dano.

5. AGRADECIMENTOS

O autor agradecer à Universidade Tecnológica Federal do Paraná e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PCV) da Universidade Estadual de Maringá pela viabilização desse estudo.

6. REFERÊNCIAS

- [1] Zuo Z, He Y, Li S. Rational Use of Idealized Shear-Building Models to Approximate Actual Buildings. *Buildings*. 2022; 12(3):273.
- [2] Alhan C, Sürmeli M. Shear building representations of seismically isolated buildings. *Bulletin of Earthquake Engineering*. 2011; 9:1643-1671.
- [3] Rahimi F, Aghayari R, Samali B. Application of tuned mass dampers for structural vibration control: a state-of-the-art review. *Civil Engineering Journal*. 2020; 1622-1651.
- [4] Ryan KL, Polanco J. Problems with Rayleigh damping in base-isolated buildings. *Journal of structural engineering*. 2008; 134(11):1780-1784.
- [5] Pan D, Chen G, Wang Z. Suboptimal Rayleigh damping coefficients in seismic analysis of viscously-damped structures. *Earthquake engineering and engineering vibration*. 2014; 13(4):653-670.
- [6] Newmark NM. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering mechanics Division*. 1959; 85(3):67-94.
- [7] Houbolt JC. A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. *Journal of the Aeronautical Sciences*. 1950; 17(9):540-550.
- [8] Wilson EL, Farhoomand I, Bathe KJ. Nonlinear dynamic analysis of complex structures. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. 1972; 1(3):241-252.
- [9] Abad JSM, Mahmoudi M, Dowell E. Novel technique for dynamic analysis of shear frames based on energy balance equations. *Scientia Iranica*. 2020; 27(3):1091-1112.
- [10] Zhang JY, Aoki T. Damage detection of multi-story shear buildings due to earthquakes by model updating method. *Structural Control and Health Monitoring*. 2017; 24(4):e1895.
- [11] Pozo JPD, Farina HS. *Análisis Dinámico de Edifícios*. 2ª ed. Peru: American Concrete Institute, Capítulo Peruano, 1991.
- [12] Silva TC. Análise das teorias de viga de Bernoulli e Timoshenko para vigas em diferentes condições de contorno. *Engenharia Civil UM*. 2022; 62:45-54.
- [13] Soriano HL. *Introdução à dinâmica das estruturas*. 1ª ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.
- [14] Scilab, versão 2024.0.0. Dassault Systèmes, 2023.
- [15] Pena TV. Controle passivo da resposta dinâmica estrutural via análise numérica e otimização. *Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Ouro Preto*. Ouro Preto, Minas Gerais. 2017.
- [16] Júnior PLB, Morais MVG, Avila SM. Inverted pendulum damper design parameters for vibration control in tall buildings. *Proceedings of the 24th ABCM International Congress of Mechanical Engineering, Curitiba*. 2017. [acesso 28 fev. 2024] Disponível em: <https://www.sistema.abcm.org.br/articleFiles/download/11162>
- [17] Yanik A, Ulus Y. Soil-Structure Interaction Consideration for Base Isolated Structures under Earthquake Excitation. *Buildings*. 2023; 13(4):915.
- [18] Su WC, Huang CS, Hung SL, *et al.* Locating damaged storeys in a shear building based on its sub-structural natural frequencies. *Engineering Structures*. 2012; 39:126-138.
- [19] Kim W. An improved implicit method with dissipation control capability: The simple generalized composite time integration algorithm. *Applied Mathematical Modelling*. 2020; 81:910-930.
- [20] Bathe KJ. *Finite element procedures*. 2ª ed. Watertown, MA: Klaus-Jurgen Bathe, 2016.
- [21] Chung J., Yoo HH. Dynamic analysis of a rotating cantilever beam by using the finite element method. *Journal of Sound and vibration*. 2002; 249(1):147-164.
- [22] Vaz LE. *Método dos elementos finitos em análise de estruturas*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.
- [23] Soares Jr D. A new family of time marching procedures based on Green's function matrices. *Computers & Structures*. 2011; 89(1-2):266-276.
- [24] Ribeiro RR. *Análise modal de um shear building sob carregamento senoidal*. Universidade de Brasília, 2017.
- [25] Cimellaro GP, Marasco S. *Introduction to Dynamics of Structures and Earthquake Engineering*. Switzerland: Springer, 2018.

- [26] Chopra AK. Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering. 5^a ed. United States Of America: Prentice Hall, 2020.
- [27] Fernandes WL. Análise paramétrica da instabilidade de estruturas reticuladas planas esbeltas com comportamento dinâmico geometricamente não linear pelo Método Posicional dos Elementos Finitos. Tese (Doutorado), Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, Minas Gerais. 2022.
- [28] Varanis M, Silva AL, Mereles AG. On mechanical vibration analysis of a multi degree of freedom system based on arduino and MEMS accelerometers. Revista Brasileira de Ensino de Física. 2018; 40(1): e1304.
- [29] Han SM, Benaroya H, Wei T. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. Journal of Sound and vibration. 1999; 225(5): 935-988.