

ANÁLISE DO MOMENTO FLETOR EM LAJE LISA

ANALYSIS OF BENDING MOMENT ON FLAT SLAB

ANDERLÉIA DEPINTOR **AQUE**^{1*}, DANICLER **BAVARESCO**², JOÃO DIRCEU NOGUEIRA **CARVALHO**^{3*}

1. Acadêmico do Curso de Graduação em Engenharia Civil pela Faculdade Ingá, Campus Maringá, PR, Brasil; 2. Engenheiro Civil, Mestre pela Universidade Estadual de Maringá, Campus Maringá, PR, Brasil; 3. Engenheiro Civil, Doutor pela Universidade Estadual de Maringá, Docente do curso de Graduação em Engenharia Civil da Faculdade Ingá, Campus Maringá, PR, Brasil.

*Rua Tucuman, 111, Vila Morangueira, Maringá, Paraná, Brasil. CEP: 87040-170. anderaque@gmail.com

Recebido em 14/06/2016. Aceito para publicação em 21/08/2016

RESUMO

A norma¹ coloca que a análise estrutural de laje lisa deve ser feita mediante procedimento numérico adequado. Porém, em casos de estruturas com pilares dispostos em filas ortogonais de maneira regular e com vãos pouco diferentes, permite a realização do cálculo dos esforços por um procedimento aproximado. Os resultados do seguinte estudo sugerem verificar se este modelo de análise simplificado se aproxima efetivamente de um modelo numérico na obtenção dos momentos fletores. Para isso, é realizada análise de cinco estruturas formadas por filas ortogonais de pilares espaçados com vãos variáveis de três a sete metros e, verificado o pórtico proposto pela norma¹, por meio do software Ftool e o modelo numérico pelo Método dos Elementos Finitos por meio da simulação das estruturas no software SAP2000. Na comparação entre os valores obtidos, o processo elástico aproximado gerou resultados contrários a segurança em determinadas regiões e quantidades até cinco vezes superiores em outras, verificando-se, portanto que as quantidades obtidas pelo modelo de análise simplificado não se aproximaram dos valores encontrados pelo modelo numérico na obtenção dos momentos fletores em laje lisa de pilares dispostos em filas ortogonais.

PALAVRAS-CHAVE: Laje Lisa, Concreto Auto Adensável, Método dos Elementos Finitos, NBR 6118:2014.

ABSTRACT

The norm¹ poses that the structural analysis of flat slab should be done by appropriate numerical procedure, to however the cases of structures with pillars arranged in orthogonal lines of in a regular way and with few different spans, allows the realization of stress calculations for an approximate procedure. This study aimed to determine whether this model of simplified analysis approaches effectively of a numerical model in obtaining the bending moments. For this analysis was made five structures formed by orthogonal lines of spaced pillars with variable spans of three to seven meters. The analysis proposed by the norm¹ was made using the software Ftool and the numerical model used was the finite element method by simulating the structures in the software SAP2000. In the comparison

between values obtained, the approximate elastic process generated results contrary security in certain regions and values up to five times higher than in others, thus verifying that the values obtained from the simplified analysis model did not approach the values found by numerical model in obtaining the bending moments in flat slab with pillars arranged in orthogonal lines.

KEYWORDS: Flat Slab, Concrete Auto Compacting, Finite Element Method, NBR 6118:2014.

1. INTRODUÇÃO

Lajes são elementos estruturais bidimensionais planos, na forma de placa, onde a espessura é muito menor que as demais dimensões e se destinam a receber as cargas verticais que atuam nas estruturas, transmitindo-as para seus respectivos apoios, que comumente são vigas localizadas em seus bordos ou podendo ocorrer também à presença de apoios pontuais (pilares). As lajes lisas se caracterizam pelo apoio direto sobre os pilares, sem a utilização de vigas e capitéis, como o exemplo da Figura 1.

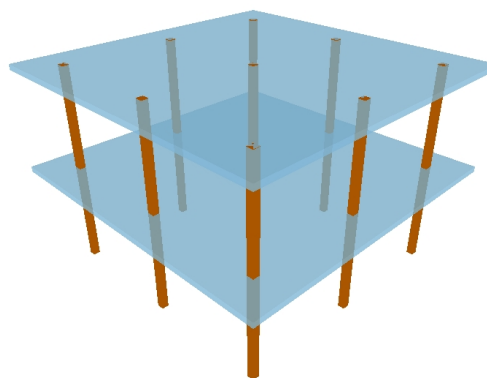


Figura 1. Esquema estrutural do sistema de laje lisa.

Com o desenvolvimento e as exigências das edificações de concreto armado, as lajes sem vigas passaram a ser uma solução interessante, pois apresentam uma série

de vantagens em relação ao sistema convencional² dentre as quais se destacam:

- Adaptabilidade a diversas formas ambientais;
- Simplificação de fôrmas, armaduras, instalações e concretagem;
- Diminuição de revestimentos,
- Redução do tempo de execução.

Mesmo com inúmeras vantagens apresentadas pelo sistema, existem também desvantagens que devem ser analisadas, pois podem inviabilizar a adoção do sistema estrutural tais como³:

- Punção das lajes;
- Maiores deslocamentos transversais das lajes;
- Redução da Estabilidade global do edifício.

A análise estrutural de lajes lisas deve ser realizada mediante emprego de procedimento numérico adequado, como diferenças finitas, elementos finitos e elementos de contorno¹. No entanto, para os casos em que os pilares estão dispostos em filas ortogonais, de maneira regular e com vãos pouco diferentes, a norma¹ permite a realização do cálculo dos esforços pelo processo elástico aproximado.

O método dos pórticos virtuais separa os vãos em quatro faixas e distribui para cada faixa (internas e externas) uma porcentagem dos momentos positivos e negativos calculados para cada pórtico de carga total, sendo que esses esforços atribuídos para cada faixa são utilizados no dimensionamento das mesmas¹.

Com o avanço tecnológico e o desenvolvimento de computadores potentes os métodos numéricos de análise de estruturas estão sendo cada vez mais usados no meio técnico e já são amplamente utilizados em programas comerciais. Entretanto, mesmo com esse avanço, a norma¹ ainda propõe a utilização do modelo simplificado para alguns casos, e nesse ponto fica a questão: será que o modelo simplificado proposto pela norma¹ representa bem os esforços reais da laje lisa?

O presente trabalho tem como objetivo verificar se o modelo de análise simplificado da norma¹ (Processo Elástico Aproximado) se aproxima efetivamente de um modelo numérico (Método dos Elementos Finitos) na obtenção dos momentos fletores em laje lisa de pilares dispostos em filas ortogonais.

Análise de lajes lisas

O processo elástico aproximado (PEA), com redistribuição, consiste em adotar em cada direção pórticos múltiplos, para obtenção dos esforços solicitantes. Cada pórtico é carregado com a carga total, para determinar os diagramas de Momento Fletor e em seguida faz-se a distribuição dos momentos obtidos em cada direção, segundo as faixas indicadas na Figura 2, da seguinte maneira:

- 45% dos momentos positivos para as duas faixas internas;

- 27,5% dos momentos positivos para cada uma das faixas externas;
- 25% dos momentos negativos para as duas faixas internas;
- 37,5% dos momentos negativos para cada uma das faixas externas.

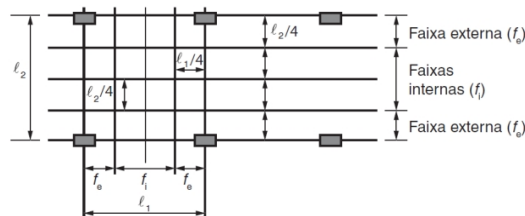


Figura 2. Faixas de laje para distribuição dos esforços nas faixas dos pórticos múltiplos. Fonte – ABNT (2014).

A análise por procedimento numérico é realizada por meio de softwares, um exemplo é o SAP2000 que utiliza o Método dos Elementos Finitos (MEF). Ele permite modelagens tridimensionais, estando disponíveis vários elementos estruturais, tais como frames, shells, asolid, e solid.

O MEF é um método numérico que se aplica em geral a problemas de engenharia em que não é possível obter soluções satisfatórias por métodos analíticos. O MEF consiste em dividir a estrutura de análise em um número discreto de elementos de dimensões finitas, denominadas elementos finito, substituindo o problema inicial mais complexo por vários problemas de resolução mais simples.

Na modelagem das estruturas a discretização dos elementos influencia na solução, por isso devem ser escolhidos com bastante cuidado. Quanto menor o elemento mais precisa será a resposta, porém maior será o tempo de processamento computacional devido ao grande número de equações a serem resolvidas e, a partir de certo refinamento, o maior número de elementos já não gera melhora significativa da solução.

2. MATERIAL E MÉTODOS

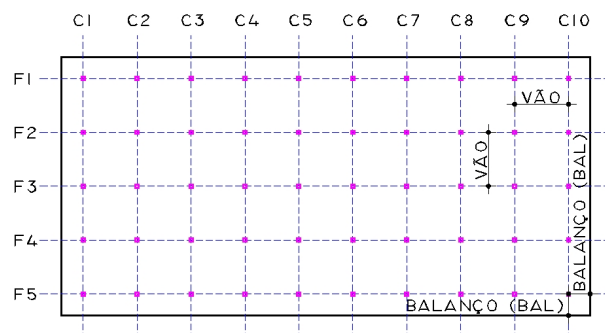


Figura 3. Planta das estruturas analisadas.

Para verificação da compatibilidade entre os esforços

pelo PEA com os obtidos por procedimento numérico por MEF, analisou-se cinco estruturas formada por cinco filas ortogonais de dez pilares cada, conforme Figura 3.

Tabela 1. Características das estruturas analisadas.

VÃOS (m)	BAL (m)	DIM. DA LAJE (m)	h (cm)	PILAR (cm)	CARGA (kN/m ²)
3,00	1,20	29,40 x 14,40	16	20x20	7,50
4,00	1,60	39,20 x 19,20	17	25x25	7,75
5,00	2,00	49,00 x 24,00	18	30x30	8,00
6,00	2,40	58,80 x 28,80	19	35x35	8,25
7,00	2,80	68,60 x 33,60	20	40x40	8,50

Definiu-se as modulações das estruturas variando os vãos de três a sete metros e o balanço em cada estrutura para compatibilização dos momentos fletores. O tamanho dos pilares foram pré-dimensionados com base no carregamento envolvido em cada estrutura.

A altura da laje (h) partiu da mínima de norma de 16 cm no vão de três metros e aumentada em um centímetro para cada aumento de um metro de vão, chegando a uma altura de 20 cm para os pilares espaçados em sete metros (vão/35). Arbitrou-se o incremento progressivo na altura também para causar um aumento gradual no carregamento, por isso não foi otimizada a relação vão/altura.

O carregamento utilizado foi constituído por carga de utilização de 2,5 kN/m², revestimento de 1 kN/m² e pelo peso próprio das lajes lisas. As características das cinco estruturas analisadas estão relacionadas na Tabela 1.

Realizou-se a análise em uma laje do primeiro andar de uma edificação com altura de dois pavimentos de 3,00 metros, como mostra a Figura 4.

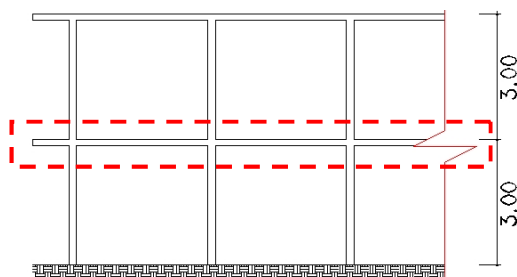


Figura 4. Corte da laje lisa analisada.

Nas modelagens, foi considerado concreto fck 30 MPa, módulo de elasticidade secante de 26 GPa e coeficiente de Poisson de 0,2.

Na determinação dos momentos fletores para o PEA

utilizou-se o programa FTOOL sendo modelado o pórtico central da fila ortogonal F3, disposto da Figura 3. O carregamento adotado foi o total do pórtico seguindo o procedimento recomendado pela norma¹, conforme Tabela 2 e exemplo da Figura 5.

Tabela 2. Pórticos modelados no FTOOL.

VÃOS (m)	BALANÇO (m)	COMP. (m)	LAJE h (cm)	PILAR (cm)	CARREG. DO PÓRTICO (kN/m)
3	1,2	29,4	16	20x20	22,5
4	1,6	39,2	17	25x25	31
5	2	49	18	30x30	40
6	2,4	58,8	19	35x35	49,5
7	2,8	68,6	20	40x40	59,5

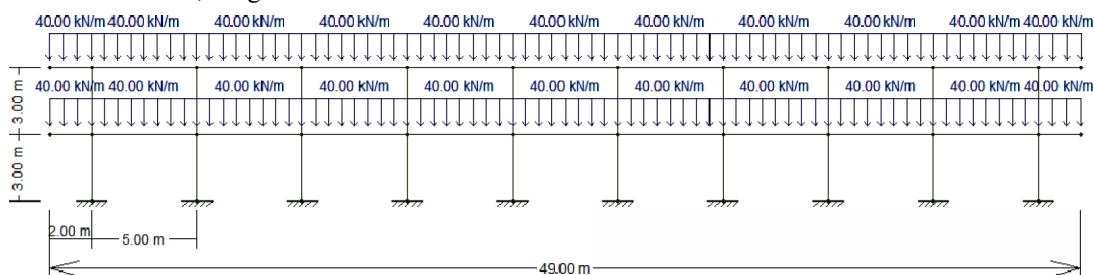


Figura 5. Modelagem do pórtico do vão de cinco metros do PEA no Ftool.

Tabela 3. Modulação dos elementos tipo shell das simulações.

VÃO (m)	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00
SHELL (cm)	15x15	20x20	25x25	30x30	35x35

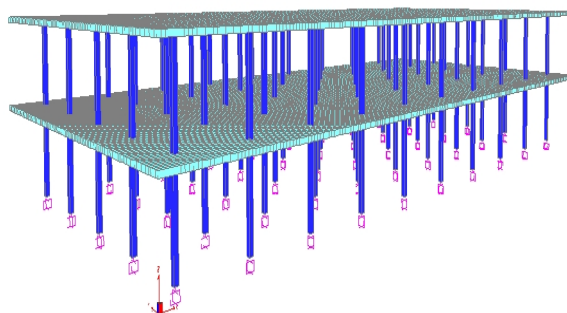


Figura 6. Modelagem da estrutura de cinco metros de vão no SAP2000.

No programa SAP2000 a estrutura foi simulada com os mesmos carregamentos e mesmas características dos materiais. Para os pilares utilizou-se elementos do tipo frame engastados na base, para as lajes elementos do tipo shell e, para elementos por vão, a discretização de malha de 20x20, o que resulta nas modulações disposto na Tabela 3. O lançamento da estrutura de cinco metros de vão pode ser verificado na Figura 6.

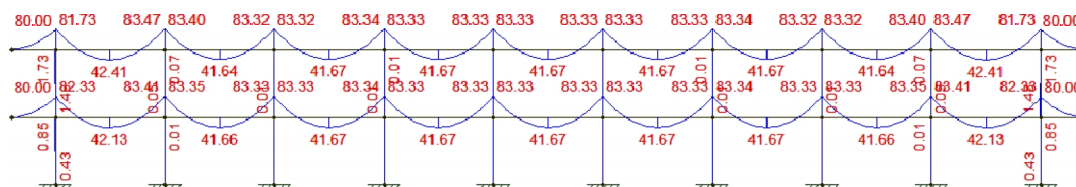


Figura 7. Diagrama de momento fletor (kN.m) do pórtico de cinco metros de vão simulado no FTOOL

Para verificar se o refinamento da malha utilizada estava adequado, simulou-se para a estrutura de maior tamanho de elemento (35x35cm) uma discretização com malha de 40x40 elementos (17,5x17,5cm) e compararam-se os resultados obtidos.

Tabela 4. Momentos fletores obtidos pelo PEA para as estruturas em análise..

VÃOS (m)	POS (kN.m)	NEG (kN.m)
3,00	8,44	16,87
4,00	20,67	41,33
5,00	41,67	83,33
6,00	74,25	148,50
7,00	121,48	242,96

Tabela 5. Distribuição dos momentos fletores no modelo pelo PEA para as faixas internas e externas (kN.m/m).

	LAJE VÃO DE 3 m		LAJE VÃO DE 4 m		LAJE VÃO DE 5 m		LAJE VÃO DE 6 m		LAJE VÃO DE 7 m	
	POS	NEG	POS	NEG	POS	NEG	POS	NEG	POS	NEG
FE	2,32	-6,3	5,68	-15,5	11,5	-31	20,4	-56	33,4	-91
FI	3,8	-4,2	9,3	-10,3	18,8	-21	33,4	-37	54,7	-61

Com base na regularidade dos momentos fletores pôde-se adotar então o valor do momento fletor positivo (POS) e negativo (NEG) para cada estrutura simulada, conforme Tabela 4.

Distribuindo as porcentagens especificadas pela norma¹ para as faixas internas e externas obtêm-se os valores de momento fletor conforme Tabela 5.

Os momentos fletores no SAP2000 foram extraídos dos nós dos elementos ao longo da faixa interna (FI) e da faixa externa (FE) da fileira central de pilares (fila F3 na Figura 3) sendo levantados os valores para a região do apoio (momento positivo - fileira C5 na Figura 3) e para a região central do vão (momento negativo - entre fileiras C5 e C6 da Figura 3). Para cada região, FE e FI, calculou-se a média ponderada dos valores do momento

fletor ao longo da faixa, esforço este que foi então comparado ao momento fletor obtido pelo PEA.

3. RESULTADOS

As modelagens dos pórticos equivalentes no FTOOL resultaram nos diagramas de momento fletor conforme exemplo da Figura 7.

As simulações das estruturas no SAP2000 resultaram nos Diagramas de Momento Fletor na direção

X conforme exemplo da Figura 8.

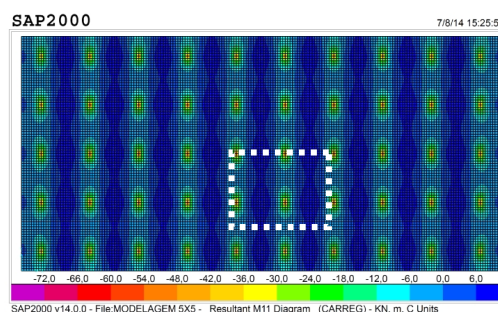


Figura 8. Diagrama de momento fletor da laje lisa obtido no software SAP2000 (kN.m).

Dos diagramas obtidos nas simulações pelo MEF extraíram-se os valores ao longo da faixa interna e externa da região central (retângulo tracejado da Figura 8). Os valores, bem como sua média ponderada ao longo de toda a faixa, resultam na Tabela 6.

Tabela 6. Valores dos momentos fletores obtidos pelo SAP2000 ao longo da faixa interna e externa (kN.m).

	LAJE VÃO DE 3 m		LAJE VÃO DE 4 m		LAJE VÃO DE 5 m		LAJE VÃO DE 6 m		LAJE VÃO DE 7m	
	POS	NEG	POS	NEG	POS	NEG	POS	NEG	POS	NEG
L PILAR	3,49	-24,82	6,41	-45,55	10,34	-73,43	15,35	-109,03	21,53	-152,89
LIN. 2	3,46	-13,20	6,34	-24,22	10,23	-39,04	15,18	-57,97	21,29	-81,28
LIN. 3	3,35	-8,59	6,14	-15,76	9,91	-25,41	14,71	-37,74	20,63	-52,91
FE LIN. 4	3,19	-6,19	5,85	-11,36	9,43	-18,32	14,00	-27,20	19,64	-38,14
LIN. 5	2,99	-4,55	5,50	-8,35	8,86	-13,46	13,16	-19,99	18,45	-28,02
LIM FAIXA	2,80	-3,38	5,13	-6,20	8,27	-10,00	12,29	-14,85	17,23	-20,83
M.POND.	3,23	-9,33	5,92	-17,11	9,55	-27,59	14,17	-57,44	19,88	-57,44
LIM FAIXA	2,80	-3,38	5,13	-6,20	8,27	-10,00	12,29	-14,85	17,23	-20,83
LIN. 2	2,61	-2,54	4,79	-4,65	7,72	-7,50	11,47	-11,14	16,08	-15,62
LIN. 3	2,45	-1,93	4,50	-3,55	7,26	-5,72	10,78	-8,50	15,12	-11,91
FI LIN. 4	2,34	-1,53	4,29	-2,81	6,91	-4,52	10,27	-6,72	14,40	-9,42
LIN. 5	2,26	-1,29	4,16	-2,38	6,70	-3,84	9,95	-5,70	13,95	-7,99
FINAL	2,24	-1,22	4,11	-2,24	6,63	-3,61	9,84	-5,36	13,80	-7,52
M.POND.	2,44	-1,92	4,47	-3,52	7,21	-5,68	10,71	-11,82	15,01	-11,82

Da simulação da estrutura de sete metros de vão com a discretização de 40x40 elementos por vão, para a verificação do refinamento da malha, obteve-se a Tabela 7. Comparando a média ponderada das duas simulações chega-se a Tabela 8.

Tabela 7. Valores dos momentos fletores das lajes de 7 metros de vão para a discretização shell de 40x40 elementos.

POSIÇÃO		MOMENTO VÃO 7 METROS	
		POSITIVO	NEGATIVO
FE	L PILAR	21,43	-180,50
	LIN. 2	21,37	-108,76
	LIN. 3	21,20	-79,98
	LIN. 4	20,91	-64,51
	LIN. 5	20,53	-53,42
	LIN. 6	20,07	-44,98
	LIN. 7	19,54	-38,24
	LIN. 8	18,96	-32,72
	LIN. 9	18,36	-28,11
	LIN. 10	17,75	-24,21
MED. POND	LIM FAIXA	17,15	-20,91
	LIM FAIXA	19,80	-57,56
	LIM FAIXA	17,15	-20,91
	LIN. 2	16,57	-18,09
	LIN. 3	16,02	-15,70
	LIN. 4	15,52	-13,68
	LIN. 5	15,08	-11,99
	LIN. 6	14,69	-10,64
	LIN. 7	14,37	-9,50
	LIN. 8	14,12	-8,66
FI	LIN. 9	13,94	-8,06
	LIN. 10	13,83	-7,71
	FINAL	13,79	-7,59
	MED. POND.	14,96	-11,83

Tabela 8. Comparação entre malhas de refinamento de 20x20 e 40x40 elementos.

MALHA DE ELEMENTOS	FAIXA EXTERNA		FAIXA INTERNA	
	POS	NEG	POS	NEG
20x20	19,88	-57,44	15,01	-11,82
40x40	19,8	-57,56	14,96	-11,83
VAR (%)	-0,40%	0,21%	-0,35%	0,04%

Analisando os valores da Tabela 8 percebe-se que a diferença entre a média ponderada obtida pela malha de 20x20 para a de 40x40 é pequena, ficando a máxima variação em 0,40%, admitindo-se, portanto, como satisfatória a discretização de 20x20 elementos por vão.

Assim, se comparado os valores obtidos pelo PEA com os obtidos nas simulações por MEF e calculando a razão entre o valor pelo método proposto pela norma com o procedimento numérico chega-se a Tabela 9, para os momentos positivos, e Tabela 10, para os momentos negativos.

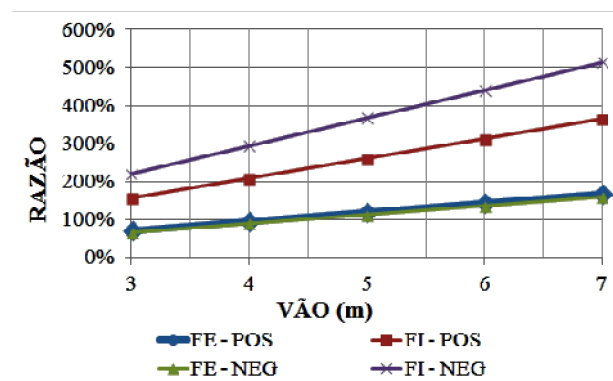
Para melhor visualização dos resultados obtidos, plotou-se o gráfico da Figura 9, relacionando a razão obtida para cada momento fletor nas cinco estruturas analisadas.

Tabela 9. Comparação dos momentos fletores positivos entre os procedimentos.

PROCESSO		MOMENTO FLETOR POSITIVO (kN.m/m)				
		VÃO 3	VÃO 4	VÃO 5	VÃO 6	VÃO 7
		m	m	m	m	m
FE	PEA	2,32	5,68	11,46	20,42	33,41
	M. POND. MEF	3,23	5,92	9,55	14,174	19,878
	RAZÃO	71,92%	96,02%	120,03%	144,06%	168,06%
FI	PEA	3,80	9,30	18,75	33,4125	54,666
	M. POND. MEF	2,44	4,47	7,21	10,707	15,013
	RAZÃO	155,91%	207,99%	260,15%	312,06%	364,12%

Tabela 10. Comparação dos momentos fletores negativos entre os procedimentos.

PROCESSO		MOMENTO FLETOR NEGATIVO (kN.m/m)				
		VÃO 3	VÃO 4	VÃO 5	VÃO 6	VÃO 7
		m	m	m	m	m
FE	PEA	-6,33	-15,50	-31,25	-55,69	-91,11
	M. POND. MEF	-9,33	-17,11	-27,59	-40,968	-57,442
	RAZÃO	67,83%	90,57%	113,27%	135,93%	158,61%
FI	PEA	-4,22	-10,33	-20,83	-37,125	-60,74
	M. POND. MEF	-1,92	-3,52	-5,68	-8,433	-11,823
	RAZÃO	219,89%	293,37%	366,96%	440,23%	513,74%

**Figura 9.** Razão entre os processos analisados.

4. DISCUSSÃO

Na análise do gráfico da Figura 9 observa-se resultados favoráveis e contrários a segurança, sendo necessário uma análise criteriosa em cada trecho.

Para o momento fletor positivo da faixa externa, o valor obtido pelo PEA variou de 61,87% a 158,06% em relação à média ponderada dos valores encontrados pelo MEF. O mesmo está contrário à segurança para as estruturas simuladas com três e quatro metros de vão e, favorável para os casos de cinco, seis e sete metros de vão.

Já para o momento fletor positivo da faixa interna, o valor obtido pelo PEA variou de 155,91% a 364,12% em relação ao método computacional. Por apresentar todos os valores superiores o mesmo está a favor da segurança, porém gera uma quantidade de armadura acima da necessária.

No caso do momento fletor negativo da faixa externa, o valor obtido pelo método da norma variou de 67,83% a 158,61% em relação à média ponderada do procedimento.

to numérico. Semelhante ao valor do Momento Positivo da FE, este está contrário a segurança para as estruturas de três e quatro metros de vão e a favor para os casos de cinco, seis e sete metros.

No momento fletor negativo da faixa interna, a relação entre os procedimentos foi de 219,87% a 513,74%. Os valores pelo PEA foram muito superiores, estão a favor da segurança, porém geram estruturas antieconômicas.

5. CONCLUSÃO

Por meio da simulação, analisou-se os resultados de cinco estruturas de laje lisa de pilares dispostos em filas ortogonais, e a compatibilidade entre os momentos fletores obtidos pelo Processo Elástico Aproximado proposto pela norma¹ com os encontrados por modelagem pelo software que utiliza Método dos Elementos Finitos.

O processo elástico aproximado gerou resultados contrários a segurança para os momentos fletores distribuídos nas faixas externas do pórtico nas simulações de estruturas com três e quatro metros de vão e um pouco superiores para as simulações de cinco, seis e sete metros. Já para os momentos fletores distribuídos nas faixas internas, os indicativos do PEA resultaram em quantidades muito superiores aos obtidos pelo MEF, chegando até a cinco vezes o valor para a estrutura de sete metros de vão.

Portanto, conclui-se que as quantidades obtidas pelo modelo de análise simplificado da norma (PEA) não se aproximou das quantidades encontradas pelo modelo numérico (MEF) na obtenção dos momentos fletores em laje lisa de pilares dispostos em filas ortogonais.

REFERÊNCIAS

- [1] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. ABNT NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- [2] FIGUEIREDO, J. R. F. Sistemas estruturais de lajes sem vigas: Subsídios para o projeto e execução. 1989, 262f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas). Universidade de São Paulo, São Carlos, 1989.
- [3] HENNRICH, C. A. Estudos sobre a Modelagem de Lajes Planas de Concreto Armado. 2003, 201f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.