

ANÁLISE PLÁSTICA DE VIGAS CONTÍNUAS EM CONCRETO ARMADO

PLASTIC ANALYSIS OF CONTINUOUS BEAMS OF REINFORCED CONCRETE

GUSTAVO ZAUPA ALVES^{1*}, ARTHUR ROSINSKI DO NASCIMENTO²

1. Acadêmico do curso de graduação em Engenharia Civil da UNINGÁ – Centro Universitário Ingá; 2. Engenheiro civil, Especialista pela Universidade Estadual de Maringá, docente do curso de graduação em Engenharia Civil da UNINGÁ – Centro Universitário Ingá.

* Rua Euclides da Cunha, 447, Centro, Doutor Camargo – Paraná, Brasil, 87155-000. gustavo_zaup@hotmail.com

Recebido em 13/08/2016. Aceito para publicação em 26/10/2016

RESUMO

A análise estrutural permite estabelecer as distribuições de esforços internos, tensões, deformações e deslocamentos, em uma parte ou em toda a estrutura como escrito na NBR 6118:14. A análise é denominada plástica quando as não-linearidades puderem ser consideradas, admitindo-se materiais de comportamento rígido-plástico perfeito ou elasto-plástico perfeito. Neste trabalho procurou-se apresentar os conceitos básicos para a análise de uma viga contínua utilizando-se da teoria da plasticidade e da capacidade de rotação plástica nas seções críticas com a finalidade de se conhecer a máxima carga suportada pela estrutura já dimensionada. A metodologia consistiu em determinar os limites inferior e superior da carga de ruptura através das equações de equilíbrio, das equações dos esforços internos e dos momentos resistentes das armaduras já definidas para a viga. Determinado estes limites, foi possível identificar o aparecimento das rótulas plásticas e o mecanismo de colapso, sendo verificada também a capacidade de rotação plástica nas seções críticas. Pode-se concluir que estruturas hiperestáticas possuem capacidade de redistribuição de esforços mesmo após o escoamento da armadura no ponto de momento máximo, quando garantido a capacidade de rotação plástica nesta seção. Desta forma, a carga de ruptura pode ser maior quando realizada a análise plástica ao invés da simples análise elástico-linear. Apesar de levar em consideração algumas não-linearidades físicas dos materiais, a análise plástica pode ser verificada de maneira simples em vigas contínuas.

PALAVRAS-CHAVE: Análise estrutural, teoria da plasticidade, capacidade de rotação plástica, viga contínua.

ABSTRACT

The structural analysis allows to establish the distributions of internal forces, stresses, strains and displacements, in part or in whole structure as written in the NBR 6118: 14. The analysis is referred to as plastic when the nonlinearities can be considered, assuming perfect rigid-plastic behavior of materials or perfect elastoplastic. This work sought to present the basic concepts for the analysis of a continuous beam using the theory of plasticity

and the plastic rotation capacity in the critical sections for the purpose of knowing the maximum load supported by scaled structure. The methodology was to determine the lower and upper limits of the breaking load through the equilibrium equations, the equations of internal forces and moments resistant reinforcement already defined for the beam. Given these limitations, it was possible to identify the appearance of plastic hinges and the collapse mechanism, and also checked the plastic rotation capacity in the critical sections. It can be concluded that indeterminate structures have redistribution capacity efforts even after the flow of the steel in the maximum time section, when the plastic guaranteed rotation capacity in this section. Thus, the breaking load can be increased when the plastic analysis performed instead of a simple linear analysis. Although taking into account certain physical nonlinearities of materials, plastic analysis can be checked in a simple way in continuous beams.

KEYWORDS: Structural analysis, theory of plasticity, plastic rotation capacity, continuous beam.

1. INTRODUÇÃO

A análise estrutural é feita quando se deseja determinar os efeitos das ações em uma estrutura com a finalidade de efetuar verificações do estado-limite último (ELU) e de serviço (ELS). Ela permite conhecer as intensidades dos esforços internos, tensões, deformações e deslocamentos¹.

Existem cinco métodos de análise estrutural: análise linear, análise linear com redistribuição, análise plástica, análise não linear e análise através de modelos físicos².

É comum dimensionar uma estrutura por meio da análise linear, na qual é assumido que a estrutura atinge a sua capacidade máxima quando o aço escoar em uma seção qualquer. A análise plástica parte do princípio que uma estrutura hiperestática ainda é capaz de absorver maiores cargas àquela que provocou o primeiro escoamento da armadura por meio da redistribuição dos esforços.

Neste contexto, o presente trabalho se faz necessário para a popularização da análise plástica na determinação da carga de ruptura de uma estrutura em concreto armado,

com o propósito de servir de auxílio em uma análise de capacidade de carga, reforços estruturais e diagnósticos de manifestações patológicas. Tal análise pode minimizar custos com eventuais reforços e até mesmo demolições.

Assim, o objetivo deste artigo é a determinação do limite inferior da carga de ruptura, que corresponde à carga de ruptura de uma análise elástica, e o limite superior da carga de ruptura, que corresponde à máxima carga que a estrutura pode suportar através da teoria da plasticidade. Para isto, será necessário definir e abordar os principais conceitos desta teoria.

1.1 Comportamento mecânico dos materiais

Um dos principais ensaios de caracterização dos materiais é o de tração e compressão, na qual se busca conhecer a relação entre tensão e deformação para o corpo de prova ensaiado.

Aplicando um carregamento uniaxial de tração ou compressão em um corpo de prova padrão, é possível confeccionar um gráfico que representa o comportamento da tensão a uma determinada deformação.

Um material tem comportamento linear quando o traçado do diagrama tensão-deformação se dá em uma linha reta. Para ser considerado elástico, quando descarregado, o corpo deve retornar a sua posição original, e não apresentar deformação residual. Pode-se dizer que um material é elástico-linear, se combinar as condições de linearidade e elasticidade supracitada, obedecendo desta forma a lei de Hooke, na qual a constante de proporcionalidade é o módulo de elasticidade longitudinal³.

Quando a tensão não aumentar proporcionalmente à deformação, isto é, o gráfico de tensão-deformação não corresponder a uma linha reta, mas manter-se trabalhando no regime elástico, este material possui comportamento elástico-não linear³.

Caso o material sofra uma deformação residual após o descarregamento, ele terá comportamento plástico, cuja deformação irreversível é dita de formação plástica. Muitos materiais apresentam, de acordo com a etapa de carregamento, uma combinação de todos os comportamentos citados acima, podendo ser ilustrado pela Figura 01³.

Os materiais que tem sua curva tensão-deformação similar ao apresentado na Figura 01, são chamados de materiais dúcteis, e são aqueles que sofrem grandes deformações antes de atingir a ruptura, podendo ser exemplificado pelos aços laminados a quente. Eles podem ter a região do escoamento bem definida ou não. O limite de elasticidade é o ponto que separa os comportamentos elásticos e plásticos do material. Assim, após este limite, que também corresponde à tensão de escoamento, o material sofre deformações permanentes quando descarregados³.

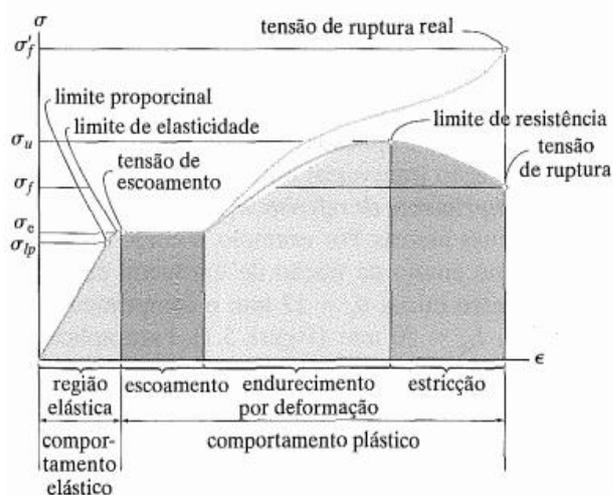


Figura 01. Diagrama tensão-deformação convencional para um material dúctil³.

Entende-se por escoamento a fase em que, ultrapassado a tensão de escoamento, o material sofre deformações sem qualquer acréscimo significativo de carga. Nesta etapa costuma-se dizer que o material está num estado perfeitamente plástico. Para os materiais que apresentam pouco, ou nenhum escoamento antes da ruptura, são denominados frágeis exemplificados pelo concreto⁴.

Antes mesmo do início do carregamento em peças de concreto, já estão presentes micro-fissuras nas interfaces agregado e argamassa. Quando submetido a tração, estas fissuras rapidamente se espalham e aumentam de quantidade fazendo com que a peça atinja a ruptura com pequenas cargas. Em contrapartida, ele possui grande resistência a esforços de compressão. Diante deste quadro, é justificado o uso de armaduras em regiões onde o concreto está submetido a tração. Esta combinação garante a estrutura comportamento dúctil, devendo ser sempre atendida para a garantia da segurança da construção³.

1.2 Comportamento de vigas de concreto armado submetidas à flexão-simples

O concreto armado possui comportamento não-linear devido à não linearidade dos materiais do qual é composto.

A propagação das microfissuras iniciais e a perda da rigidez estrutural impõe ao concreto a não linearidade física, assim como o escoamento e o encruamento no aço⁵.

Esta não linearidade também é observada no diagrama momento-curvatura quando a peça de concreto armado está submetida à flexão simples. A Figura 02 ilustra este comportamento.

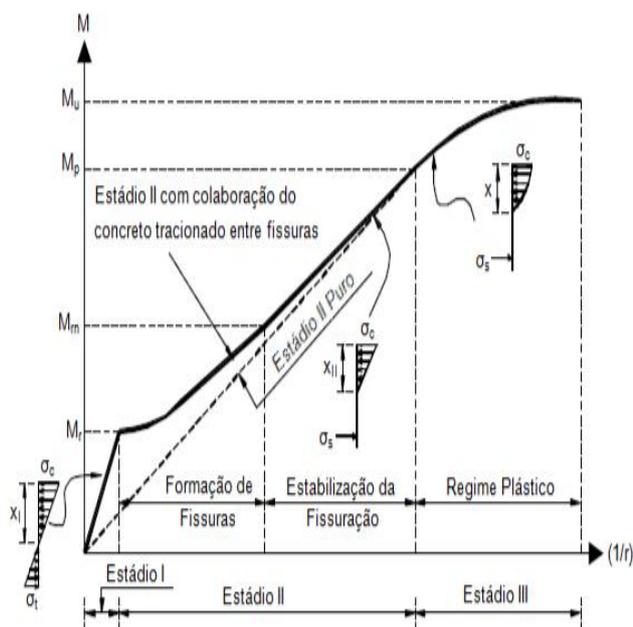


Figura 02. Diagrama momento-curvatura para o concreto armado.^[5]

No Estádio I a seção trabalha inteiramente no regime elástico linear, sendo limitada pelo momento de fissuração, M_r , a partir da qual aparecem as primeiras macro fissuras⁵.

A região do diagrama em que o concreto tracionado apresenta-se fissurado é denominado Estádio II. Nesta, o concreto comprimido ainda trabalha no regime elástico linear e a região tracionada do concreto, é desprezada no cálculo do momento de inércia e da resistência a tração, sendo este esforço resistido somente pelo aço. Esta simplificação é uma consideração conservadora, pois o concreto entre duas fissuras contribui para o aumento da rigidez da seção de concreto armado. Ou seja, não ocorre o surgimento de novas fissuras, mais sim o processo de aberturas das já existentes. Este enrijecimento é chamado de *tension stiffening*⁵.

Quando o concreto comprimido deixa de trabalhar no regime elástico e começa a plastificar, diz-se que a seção está no Estádio III. A NBR 6118:14² permite simplificar o comportamento não linear do concreto como uma curva constituída por uma parábola e um retângulo, ou então por um retângulo equivalente. É neste estágio que faz-se o dimensionamento no ELU, podendo o concreto romper por esmagamento ou o aço sofrer deformações plásticas excessivas.

1.3 Rigidez à flexão no Estádio II

A rigidez a flexão no Estádio II, nos segmentos fissurados, pode ser calculada conforme as equações a seguir⁶. Nestas equações considera-se que no diagrama momento-curvatura, o segmento correspondente ao Estádio II puro é próximo de uma reta, podendo aproximar a rigidez à flexão pelo produto do módulo de

elasticidade secante do concreto (E_{cs}), pelo momento de inércia da seção fissurada e pelo fator que considera o enrijecimento da armadura tracionada decorrente da aderência com deslizamento entre o aço e o concreto entre duas fissuras sucessivas.

Assim, a rigidez a flexão no Estádio II é igual a:

$$(EI)_{II} = E_{CS} \cdot I_{II} \cdot \frac{\epsilon_{syk}}{\epsilon_{sym}} \tag{Equação 1}$$

Da qual cada termo pode ser calculado pelas Equações (2) a (10), sabendo-se que:

- α_i e α_E são coeficientes determinados na NBR 6118:14 que relacionam o f_{ck} do concreto e o agregado utilizado;
- E_s é o módulo de elasticidade do aço;
- A_s é a área de aço na seção transversal;
- b é a largura da seção transversal da viga;
- d é a altura útil da seção transversal da viga;
- f_{yk} é resistência característica do aço.

$$E_{CS} = \alpha_i \cdot \alpha_E \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} \tag{Equação 2}$$

$$I_{II} = \frac{b \cdot d^3}{3} \alpha_s \cdot \rho_s \cdot (1 - \beta_x) \cdot (3 - \beta_x), \text{ para armadura simples} \tag{Equação 3}$$

$$\beta_x = \alpha_s \cdot \rho_s \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2}{\alpha_s \cdot \rho_s}} - 1 \right) \tag{Equação 4}$$

$$\alpha_s = \frac{E_s}{E_{CS}} \tag{Equação 5}$$

$$\rho_s = \frac{A_s}{b \cdot d} \tag{Equação 6}$$

$$\frac{\epsilon_{syk}}{\epsilon_{sym}} = \frac{1}{1 - \frac{0,18 \cdot \tau_{bm}}{\rho_s \cdot e_f \cdot f_{yk}}} \tag{Equação 7}$$

$$\tau_{bm} = 0,425 \cdot f_{ck}^{2/3} \tag{Equação 8}$$

$$\rho_s \cdot e_f = \frac{A_s}{b \cdot h_{ef}} \tag{Equação 9}$$

$$h_{ef} = 2,5 \cdot (h - d) \leq h - \frac{x}{d}, \text{ para vigas de seção retangular} \tag{Equação 10}$$

1.4 Análise Plástica

O dimensionamento de vigas de concreto armado submetidas à flexão simples no ELU é feito quando a linha neutra está entre os limites dos domínios 2 e 3 e domínios 3 e 4. No domínio 2 a ruptura se dá pela deformação plástica excessiva do aço e o concreto não atinge a sua deformação máxima. No domínio 4, parte da seção trabalha à compressão e parte à tração, apesar desta tensão não provocar o escoamento do aço,

proporcionando ao concreto uma ruptura frágil por esmagamento do concreto⁷.

Esta situação de ruptura frágil não é segura e deve ser evitada. Para evitar isto, procura-se afastar-se suficientemente do limite entre os domínios 3 e 4, quando a relação x/d assume valor de 0,628 para aço CA-50 e concretos com $f_{ck} < 50\text{MPa}$. Desta forma garantimos certa ductilidade ao concreto armado. A NBR 6118:14², no item 14.6.4.3, apresenta os limites que a linha neutra deve obedecer:

- $x/d \leq 0,45$, para concretos com $f_{ck} \leq 50\text{MPa}$;
- $x/d \leq 0,35$, para concretos com $50\text{MPa} < f_{ck} \leq 90\text{MPa}$.

Se for efetuada a redistribuição, reduzindo-se um momento fletor de M para $\delta.M$, a profundidade da linha neutra deve ser limitada por:

- $x/d \leq (\delta - 0,44)/1,25$, para concretos com $f_{ck} \leq 50\text{MPa}$;
- $x/d \leq (\delta - 0,56)/1,25$, para concretos com $50\text{MPa} < f_{ck} \leq 90\text{MPa}$.

Sendo que esta redistribuição deve, ainda, obedecer aos seguintes limites:

- $\delta \geq 0,90$, para estruturas de nós móveis;
- $\delta \leq 0,75$, para qualquer outro caso.

Atendendo estes requisitos garante-se a ductilidade da seção de concreto armado, proporcionando ruptura pela deformação excessiva do aço.

Após o alcance da tensão de plastificação total em uma seção crítica, está não suportará maiores incrementos de tensão, fazendo com que a tensão atuante seja constante e as deformações continuem aumentando. Isto quer dizer que a partir do momento de plastificação, M_p , só implicará no aumento da rotação e a seção não mais absorverá esforços adicionais. Tal situação configura a criação da chamada rótula plástica⁸.

Ao aumentar continuamente o carregamento de uma viga, um ou mais pontos críticos de momento máximo poderão entrar em escoamento, dando origem a articulações, ou rótulas plásticas. Esta é caracterizada por um aumento plástico da curvatura. Esse efeito restringe-se a um comprimento de plastificação, em torno dos pontos de momento máximo, nos quais o momento fletor não aumenta mais e passa a ser chamado de momento totalmente plástico, M_p , constante a qualquer acréscimo de carga⁹.

A formação da primeira rótula plástica não significa o colapso da estrutura, podendo a mesma continuar a resistir carregamentos adicionais até que haja um número suficiente de rótulas para torná-la hipostática⁵.

Para estruturas simples, como vigas, a redistribuição dos esforços pode ser determinada por análises elásticas

sequenciais de estruturas com grau de estaticidade decrescente¹⁰.

1.4.1 Teorema limite

MUTONI apresenta os dois teoremas fundamentais da teoria da plasticidade, desenvolvido por Gvozdev (1938) e Prager (1952)⁸:

Teorema Estático (Teorema do Limite Inferior): "Um sistema de cargas Q_s , em equilíbrio com um campo de tensões que satisfaça a condição estática de plasticidade, é um limite inferior para a carga de ruptura Q_r ".

Teorema Cinemático (Teorema do Limite Superior): "Um sistema de cargas Q_c , correspondente a um mecanismo lícito satisfazendo a condição cinemática de plasticidade, é um limite superior para a carga de ruptura Q_r ".

Diante dos teoremas expostos, pode-se concluir que a carga que proporciona o aparecimento da primeira rótula plástica corresponde a um limite inferior para a carga de ruptura. Já a carga que provoca o aparecimento da última rótula plástica na estrutura, transformando-a num mecanismo, corresponde a um limite superior para a carga de ruptura.

1.4.2 Capacidade de rotação plástica

Em estruturas hiperestáticas podem se formar rótulas plásticas suficientes para desenvolver um mecanismo. Mas para concretizar a formação deste mecanismo, as seções críticas precisam de capacidade de rotação plástica suficiente para atender à rotação plástica requerida⁸.

A rotação plástica, corresponde ao somatório das rotações provocadas pelo escoamento da armadura em cada fissura de uma seção crítica, considerando também a lei da tensão de aderência-deslizamento do concreto armado, como pode-se ver na Figura 03.

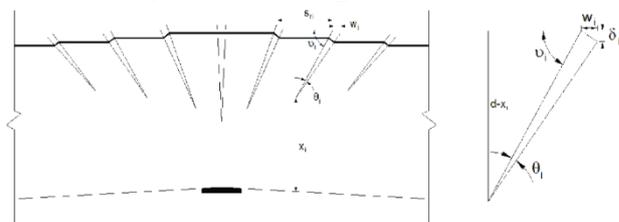


Figura 03. Método de Bachmann para o cálculo da rotação¹².

Buchaim^[6] apresenta duas teorias para o cálculo rotação plástica, na qual há rotações apenas nas seções fissuradas onde há plastificação da armadura para a carga última. A soma das rotações da primeira etapa subtraída a soma das rotações da segunda etapa, resulta na capacidade de rotação plástica, que se verifica quando a carga aumenta de Q_y a Q_u .

A capacidade de rotação plástica é definida como a diferença entre a rotação correspondente a carga última e a rotação verificada no início do escoamento das armaduras. Portanto, a rotação plástica pode ser calculada

como a integral da curvatura após a cedência. A Figura 04 ajuda a entender esta situação.

Portanto a rotação plástica pode ser calculada como a integral da curvatura após a cedência das armaduras na zona plastificada, mostrada na Equação (11)¹².

$$\theta_{pl} = \int_{l_{pl}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_y} \right) dl = \int_{l_{pl}} \frac{\epsilon_s - \epsilon_{sy}}{d-x} dl \quad \text{Equação (11)}$$

Sabendo-se que:

- θ_{pl} é o ângulo de rotação plástico da viga;
- l_{pl} é o comprimento da rótula plástica;
- $1/r$ é a curva total da secção;
- $1/r_y$ é a curvatura da secção no instante da cedência das armaduras;
- ϵ_s é a deformação total das armaduras;
- ϵ_{sy} é a deformação de escoamento das armaduras;
- d é a altura útil da secção;
- x é a profundidade da linha neutra.

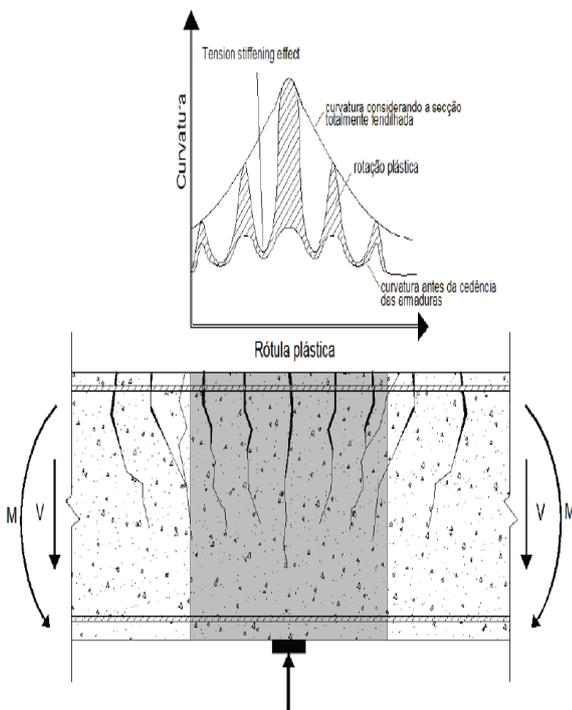


Figura 04. Evolução da curvatura e o efeito “tension stiffening”.^[11]

A determinação da rotação plástica também pode ser feita pelo Método Simplificado de acordo com a Equação (12)^[6]:

$$\theta_{pl} = \alpha_y \cdot \left(\frac{Mu - My}{(EI)_{pl}} \right) = \frac{L}{2(EI)_{pl}} \cdot \frac{(Mu - My)^2}{Mu} \quad \text{Equação (12)}$$

Sabendo-se que:

- L é o tamanho da viga;

- M_y é o momento resistente da secção;
- M_u é o momento na secção central da viga equivalente obtido pelo diagrama Momento-Curvatura;
- $(EI)_{pl}$ é o coeficiente de rigidez à flexão na secção plastificada;
- $\alpha_y = \frac{l_{pl}}{2} = \frac{L}{2} \cdot \left(1 - \frac{My}{Mu} \right)$

Equação (13)

Quando é realizada uma análise linear com redistribuição de esforços ou uma análise plástica, é importante garantir a capacidade de rotação plástica das zonas críticas para que a ruptura ocorra como o previsto. Porém, é de suma importância reconhecer a relação momento-curvatura ou a relação entre a capacidade da rotação plástica no parâmetro x/d ¹¹.

A NBR 6118:14 estabelece o limite da rotação plástica, como função da profundidade da linha neutra no estado-limite último na flexão simples, para o momento fletor solicitante M_{sd} na secção crítica. A Figura 05 representa a capacidade da rotação plástica estabelecida por esta normativa, na qual a razão $a/d=3$, onde $a=M_{sd}/V_{sd}$, sendo V_{sd} a força cortante nesta secção. Para outras relações a/d , deve-se multiplicar os valores extraídos da Figura 03 pelo fator $\sqrt{(a/d)/3^2}$.

Para concreto entre 50 e 90MPa, é permitido a interpolação linear dos valores obtidos pela Figura 03².

Atenção especial deve ser dada para a verificação do estado-limite de serviço para a verificação de aberturas de fissuras, pois a análise plástica preocupa-se somente com o ELU².

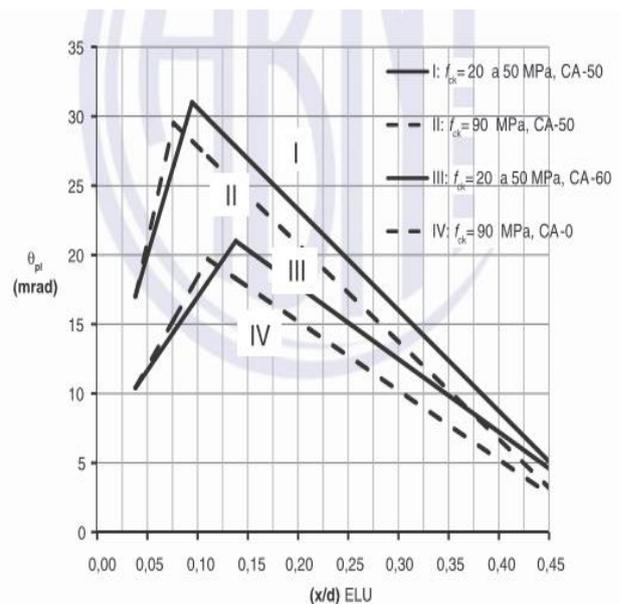


Figura 05. Capacidade de rotação de rótulas plásticas.^[2]

2. MATERIAL E MÉTODOS

Para o desenvolvimento deste trabalho foi adotado uma viga fictícia (Figura 06), na qual foi verificada a máxima capacidade de carga para esta estrutura de concreto armado.

A determinação dos limites inferior e superior da carga de ruptura foi feita com base nos conceitos apresentados no item 1.4.1 e nas equações de equilíbrio de forças e momentos em uma seção da viga de concreto armado⁷.

O cálculo da rigidez a flexão da viga foi feito de acordo com a metodologia apresentada no item 1.3⁶, com alguns conceitos relevantes da NBR 6118:14².

A rotação plástica foi calculada através do Método Simplificado apresentado no item 1.4.2 deste trabalho⁶. Para isto, foi preciso desenvolver um diagrama de Momento-Curvatura, conforme desenvolvido no item 3.4, representado na Figura 08¹³.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Dada uma viga contínua com dois vãos iguais, de comprimento $l=7,00\text{m}$, como apresentada na Figura 06, deseja-se calcular a máxima carga distribuída que ela pode suportar, utilizando os conceitos da teoria da plasticidade e da capacidade de rotação plástica. A seção transversal nos pontos 2, 4 e 5 possui quatro barras de aço CA-50 de 12,5mm de diâmetro na parte tracionada, totalizando $A_{s,ef}=4,92\text{cm}^2$, conforme ilustra a Figura 05. O concreto da estrutura apresenta o f_{ck} igual a 25MPa.

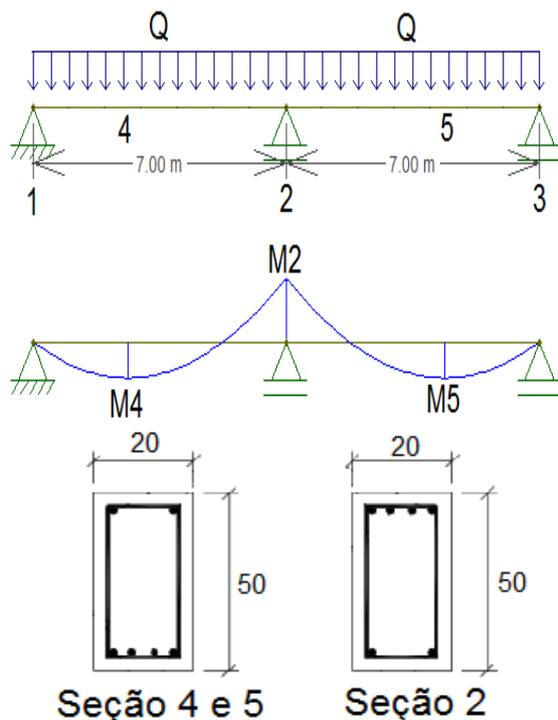


Figura 06. Esquema da viga contínua e detalhamento da seção.

3.1 Limite inferior da carga de ruptura

Percebe-se pela Figura 06, que o momento máximo da viga encontra-se na seção 2. Como a armação da viga é a mesma em todas as seções críticas, a primeira rótula ocorrerá na seção 2.

A área de aço, A_s , é calculada pela da Equação (14), na qual b_w é a largura da viga, d é a altura útil, β_x é a profundidade da linha neutra, f_{cd} é resistência do concreto reduzida e σ_{sd} é a resistência do aço reduzida.

$$A_s = \frac{0,68 \cdot b_w \cdot d \cdot \beta_x \cdot f_{cd}}{\sigma_{sd}} \quad \text{Equação (14)}$$

Sendo assim, para a seção 2, tem-se que o β_x é igual a 0,22, garantindo a ductilidade da seção quando satisfaz a relação $x/d \leq 0,45$ estabelecida pela NBR6118:14. No cálculo do β_x , optou-se por não reduzir a tensão do aço com o fator 1,15 para trabalhar com o valor da tensão de escoamento da armadura.

O momento resistente da seção, M_{fd} , é calculado pela Equação (15), que na seção 2 assume o valor de 74,43 KN.m

$$M_{fd} = 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d^2 \cdot \beta_x \cdot (1 - 0,4\beta_x) \quad \text{Equação (15)}$$

O momento de plastificação ocorre quando as barras de aço escoam, ou seja, quando o momento resistente é atingido. Desta forma, tem-se que $M_{2P} = 74,43\text{KN} \cdot \text{m}$.

É de interesse conhecer a carga distribuída que causa o momento de plastificação na seção 2. Para isto utilizou-se da Equação (16), que define o momento no engaste de uma viga cujos vínculos correspondem aos apoios de primeiro e terceiro gênero em cada uma de suas extremidades.

$$M_{2P} = \frac{Q_{1P} \cdot l^2}{8} \quad \text{Equação (16)}$$

A carga Q_{1P} é igual a 12,15 KN e corresponde ao limite inferior da carga de ruptura desta viga contínua. Pela análise elástica esta carga representaria a carga limite para o colapso da estrutura.

3.2 Limite superior da carga de ruptura

O limite superior da carga de ruptura corresponde ao valor da carga distribuída que proporciona o aparecimento de rótulas plásticas em número suficiente para transformar a estrutura em um mecanismo.

Devido a simetria da viga, o incremento da carga Q_{1P} , fará criar na estrutura duas rótulas plásticas simultaneamente quando a seção 4 e 5 atingirem o escoamento, ou seja, quando o momento resistente nestas seções for atingido.

Como a quantidade de barras tracionadas na seção 4 e 5 é igual às da seção 2, o momento resistente, ou de

plastificação, nestas seções também serão iguais a 74,43 KN.m.

Para o cálculo do limite superior da carga de ruptura, foi utilizado somente o tramo esquerdo da viga em análise, como apresentado na Figura 07, em que na seção 2, o momento se mantém constante no valor de M_{2P} , segundo o conceito de rótula plástica. O λ corresponde ao fator de multiplicação da carga Q_{1P} que deverá ser calculado para o cálculo da carga última.

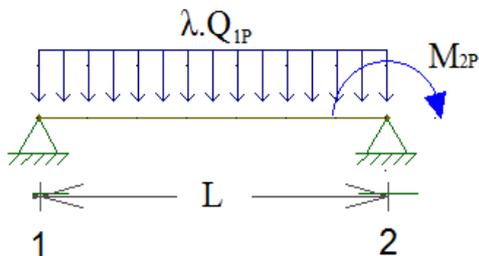


Figura 07. Viga simplificada para cálculo do λ .

Para a obtenção da equação que representa o momento fletor neste tramo da viga é necessário o cálculo das suas reações de apoio. Para isto são aplicadas as três equações de equilíbrio. Destas resultam nas Equações (17) e (18), representando a reação vertical na seção 1 e 2 respectivamente.

$$V1 = \frac{\lambda \cdot Q_{1P} \cdot L}{2} - \frac{M_{2P}}{L} \tag{Equação (17)}$$

$$V2 = \frac{\lambda \cdot Q_{1P} \cdot L}{2} + \frac{M_{2P}}{L} \tag{Equação (18)}$$

O momento fletor na viga é obtido aplicando-se o método das seções, sendo representado pela Equação (19).

$$M(x) = \frac{\lambda \cdot Q_{1P} \cdot L \cdot x}{2} - \frac{M_{2P} \cdot x}{L} - \frac{\lambda \cdot Q_{1P} \cdot x^2}{2} \tag{Equação (19)}$$

A seção 4 corresponde à posição em que o momento fletor positivo assume o valor máximo. Esta posição é calculada quando $dM/dx = 0$. Assim, a seção 4 é localizada de acordo com a Equação (20).

$$X = \frac{L}{2} - \frac{M_{2P}}{L \cdot \lambda \cdot Q_{1P}} \tag{Equação (20)}$$

Substituindo a Equação (20) na Equação (19), tem-se que o momento na seção 4 é igual à expressão dada pela Equação (21).

$$M\left(\frac{L}{2} - \frac{M_{2P}}{L \cdot \lambda \cdot Q_{1P}}\right) = \frac{\lambda \cdot Q_{1P} \cdot L}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{M_{2P}}{L \cdot \lambda \cdot Q_{1P}}\right) - \frac{M_{2P}}{L} \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{M_{2P}}{L \cdot \lambda \cdot Q_{1P}}\right) - \frac{\lambda \cdot Q_{1P}}{2} \cdot \left(\frac{L}{2} - \frac{M_{2P}}{L \cdot \lambda \cdot Q_{1P}}\right)^2 \tag{Equação (21)}$$

Como já foi mencionado, o valor do momento fletor na seção 4 é igual ao valor do momento na seção 2. Substituindo-se todos os valores dos carregamentos e vãos na Equação (19) e igualando a mesma a 74,43 KN.m, é calculado o valor de 1,457 para o λ .

Desta forma, pode-se dizer que, para a formação de uma rótula plástica na seção 4 e na seção 5 a carga distribuída deve-se atingir valor de λQ_{1P} , igual a 17,70 KN/m, sendo este valor o limite superior da carga de ruptura. Quando a carga atinge este valor, a viga contínua transforma-se num mecanismo.

3.3 Diagrama de momento Curvatura

Com o diagrama momento curvatura foi possível a obtenção do momento na seção central da viga equivalente (M_u), cujo valor é 95,46 kN.m.

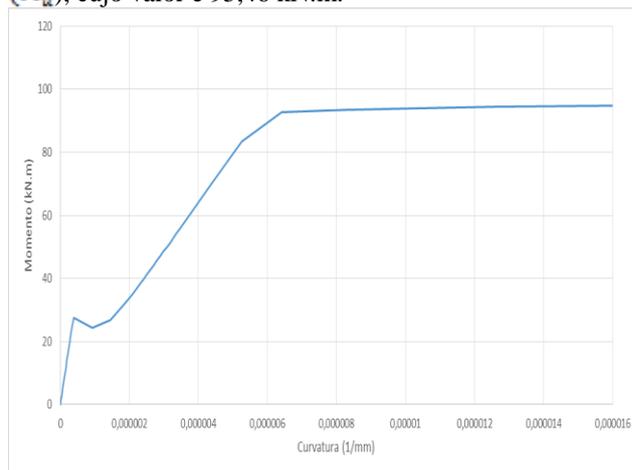


Figura 08. Diagrama momento curvatura¹³.

3.4 Cálculo Rigidez à flexão no Estádio II

De acordo com o item 8.2.8 da NBR 6118 – 2014, no cálculo do Módulo de Elasticidade, foi considerado que o $\alpha_E = 1,0$, por se tratar de um agregado constituído por granito. A rigidez a flexão assume um valor de: $(EI)_{pi} = 17341,69 \frac{KN}{M^2}$.

3.5 Capacidade de rotação plástica

A capacidade de rotação plástica da seção 2 é obtida pelo gráfico apresentado na Figura 05, quando $x/d=0,22$, é igual a $\theta_{pi} = 22 \cdot 10^{-3}$.

A rotação plástica, na mesma seção, calculada pela Equação (12), é representada por $\theta_{pi} = 9,3 \cdot 10^{-4}$, referindo-se à apenas um lado da viga (7 metros). Como a mesma é continua neste ponto multiplica-se este valor por 2, assim $\theta_{pi} = 1,86 \cdot 10^{-3}$.

4. CONCLUSÃO

Com os resultados obtidos, nota-se que o

aparecimento da primeira rótula corresponde ao limite inferior da carga de colapso, apresentado pela teoria da plasticidade.

A mesma surgiu quando o momento resistente da armadura tracionada foi atingido, ou seja, o aço entrou em escoamento. Se fosse feita somente uma análise elástica da estrutura, a carga de 12,15KN, responsável pelo surgimento do momento de 74,43 KN.m na seção 2, seria a carga última da estrutura.

Porém, em estruturas hiperestáticas, o escoamento da armadura indica que aquela seção crítica não é mais capaz de absorver acréscimos de esforços e que o carregamento será suportado pelas outras seções que ainda trabalham em regime elástico, ocorrendo assim a redistribuição dos esforços internos.

Na seção da primeira rótula plástica o momento se torna constante, igual ao momento plástico, com o aumento das rotações, assemelhando-se desta forma a um diagrama momento-curvatura bi-linear com comportamento elastoplástico perfeito, na qual o momento de escoamento e o momento último possuem o mesmo valor.

Em estruturas isostáticas, por não ter vínculos excedentes para suportar os esforços e deslocamentos, o aparecimento de uma rótula plástica acarreta no colapso da estrutura, pois ela não tem a capacidade de redistribuição dos esforços.

Como a viga contínua é capaz de redistribuir os esforços, é de interesse que conhecer a máxima capacidade de carga da estrutura. Para isto, foi necessário o cálculo do fator multiplicativo da carga, igual a 1,457 para que o momento na seção 4 atingisse seu valor resistente. O valor do momento resistente foi igual ao da seção 2 por coincidência da quantidade de armadura ativa. Caso as áreas de aço fossem diferentes, o momento resistente e a profundidade da linha neutra deveriam ser calculados pelas Equações (14) e (15).

Multiplicando-se o valor da carga correspondente ao limite inferior da carga de ruptura por 1,457 obteve-se o valor do carregamento correspondente ao limite superior da carga de ruptura. Esta carga, com valor de 17,70KN/m é a responsável por formar, na seção 4 e 5, simultaneamente, rótulas plásticas, transformando assim a viga contínua, num mecanismo.

A capacidade de rotação plástica da seção na qual formou-se a primeira rótula plástica precisou ser verificada, pois com a continuidade do carregamento além do limite inferior da carga de ruptura, as rotações crescem sem qualquer acréscimo de tensão na armadura, podendo romper por excesso de deformação.

Desta forma, a capacidade de rotação foi obtida através das indicações da NBR 6118:14 e a rotação na seção 2, calculada pelo Método Simplificado. Satisfazendo esta capacidade, conclui-se que as rótulas plásticas realmente ocorrerão nas seções 4 e 5 e a

estrutura entrará em colapso pela formação de um mecanismo.

Para um cálculo da rotação plástica mais preciso, seria necessário calcular a rigidez de cada trecho da estrutura, diferenciando as regiões plastificadas, fissuradas, com armaduras diferentes, etc.

A análise plástica não pode ser utilizada quando forem considerados efeitos de segunda ordem e/ou quando não houver suficiente ductilidade para que as configurações adotadas sejam atingidas. No caso em estudo, supôs-se que a estrutura na qual encontra-se a viga contínua seja de nós fixos e a ductilidade foi garantida quando calculado $x/d = 0,22 < 0,45$.

É necessário realizar a verificação do ELS, referente às deformações excessivas e a formação de fissuras através de uma análise linear, pois a análise plástica é utilizada apenas para a verificação do ELU.

A capacidade de rotação plástica da seção mais crítica foi definida a partir da Figura 05, obtendo um valor de $\theta_{p1} = 22 \cdot 10^{-3}$ rad. A rotação plástica da mesma seção foi calculada pelas as Equações (12) e (13), obtendo-se o valor de $\theta_{p1} = 1,83 \cdot 10^{-3}$ rad. Assim, a viga não irá sofrerá ruptura por rotação plástica, pois a capacidade de rotação é maior que a rotação plástica calculada no trabalho.

REFERÊNCIAS

- [01] Camacho JS. Concreto armado: estados limites de utilização. Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira - SP, 2005. [Acesso em 10/10/2015]. Disponível em: <http://www.feis.unesp.br/Home/departamentos/engenharia_civil/nepae/estados-limites-de-servico.pdf>. P-16.
- [02] Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6118 – Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- [03] Hibbeler RC. Resistência dos Materiais. 7ª edição. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.
- [04] Gere JM. Mecânica dos materiais. 3ª edição. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.
- [05] Silva AF. Contribuições ao estudo da não-linearidade física em vigas de concreto armado. Dissertação [Mestrado em Engenharia Civil e Preservação Ambiental]. Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria, 2012.
- [06] Buchaim R. A influência da não-linearidade física do concreto armado na rigidez à flexão e na capacidade de rotação plástica. [Tese Doutorado em Engenharia Civil]. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2001.
- [07] Carvalho JDN. Concreto armado-notas de aulas c, equacionamento: flexão simples no estado limite último. Maringá: Eduem,2010 – (Coleção Fundamentum, 62).
- [08] Silveira MVG. Análise e dimensionamento de vigas-parede de concreto armado utilizando o método dos campos de tensão. [Dissertação Mestrado em Engenharia Civil]. Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2015.
- [09] Fontes FF. Análise estrutural de elementos lineares segundo a NBR 6118:2003. [Dissertação Mestrado em

- Engenharia de Estruturas]. Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo. São Carlos, 2005.
- [10] Prager W. The Theory of plasticity: A survey of recent achievements. James Clayton Lecture, 1955. [Acesso em: 14/10/2015]. Disponível em: <<http://www.lajss.org/HistoricalArticles/The%20theory%20of%20plasticity.pdf>>.
- [11] Rêgo GM. Desempenho dos modelos da NBR-6118 para análise de vigas contínuas em concreto armado. [Dissertação Mestrado em Engenharia Civil]. Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2005.
- [12] Carmo RNF, Valença J, Dias da Costa D. Análise da rotação plástica e da contribuição do Betão entre fendas em vigas usando fotogrametria. Volume 6, número 3. São Paulo: Revista Ibracon de Estruturas e materiais.
- [13] Junqueira GR. Modelo Analítico para estudo do desempenho de vigas de concreto armado recuperadas e reforçadas à flexão. [Dissertação Mestrado em Engenharia Civil]. Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2016.